Álgebra



Intelectum
Álgebra
IX

Indicadores de logro

Unidad 1

- Identifica las propiedades sobre teoría de exponentes en la potenciación y la radicación.
- Evalúa los teoremas relativos a la teoría de exponentes.
- Aplica los teoremas sobre la teoría de exponentes en la potenciación y radicación.
- Discrimina polinomios considerando su naturaleza, la cantidad de términos e identifica términos semejantes.
- Determina el grado absoluto y relativo en polinomios y calcula su valor numérico.
- Identifica los principales productos notables.
- Reduce expresiones algebraicas empleando productos notables.
- Identifica la aplicación de cada cociente notable, así como su correcto desarrollo.
- Calcula el término general y el término independiente de un cociente notable.
- Analiza el algoritmo del aspa simple, doble y aspa doble especial.

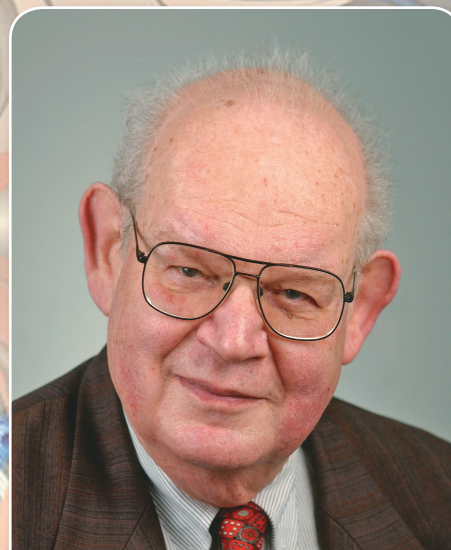
Unidad 2

- Evalúa el procedimiento al determinar el MCM y el MCD de expresiones algebraicas.
- Identifica las fracciones propias e impropias, homogéneas y heterogéneas.
- Aplica las propiedades del MCD y MCM en las operaciones con expresiones algebraicas.
- Comprende las propiedades de los números combinatorios y aplica el binomio de Newton en la potenciación.
- Calcula el término central de un binomio aplicando análisis combinatorio.
- Construye al factor racionalizante al evaluar el caso a racionalizar.
- Racionaliza determinando el factor racionalizante en los problemas.
- Evalúa las propiedades de números complejos y su representación gráfica.
- Utiliza las propiedades de números complejos al reducir expresiones.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos permiten la construcción de los fractales que son formas geométricas de belleza infinita que se generan a partir de la iteración de una sencilla expresión compleja; esto permite una investigación de la dimensión oculta. Podríamos usar los fractales como un instrumento para reconocer más al mundo y a la naturaleza y como no decirlo para descifrar la mente y el alma. Nosotros podemos percibir a los fractales en la naturaleza como las nubes, los árboles, las olas de los mares, los mariscos y en aquellas estructuras de encadenamiento de una misma forma original. Los fractales es una nueva rama de las matemáticas que se le conoce como la geometría de la naturaleza.

Los investigadores de todo el mundo se valen actualmente de fractales para aplicarlos a la astronomía, al cine, cuantificar el tráfico en Internet, en biología para el estudio de la formación de tejidos, la clasificación celular y de microorganismos, prensar archivos de audio y video; en geología para el estudio de la vulnerabilidad sísmica, para diseñar circuitos electrónicos; en economía para el análisis de variaciones de precios y para generar las más increíbles imágenes.



BENOÎT MANDELBROT
El padre de los fractales

Contenido:

Unidad 1

- **Teoría de exponentes.**
- **Polinomios.**
- **Productos notables.**
- **Cocientes notables.**
- **Factorización.**

Unidad 2

- **MCD y MCM - Fracciones algebraicas.**
- **Potenciación.**
- **Radicación-Racionalización.**
- **Números complejos.**

Unidad 3

- **Ecuaciones de primer grado Planteo de ecuaciones.**
- **Matrices y determinantes.**
- **Sistema de ecuaciones lineales.**
- **Ecuaciones de segundo grado Planteo de ecuaciones.**
- **Ecuaciones de grado superior.**

Unidad 4

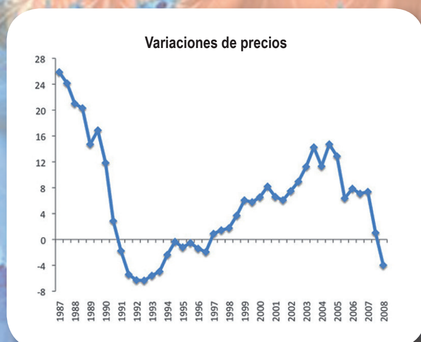
- **Inecuaciones.**
- **Funciones.**
- **Límites.**
- **Derivadas.**
- **Sucesiones-Progresiones**

Unidad 3

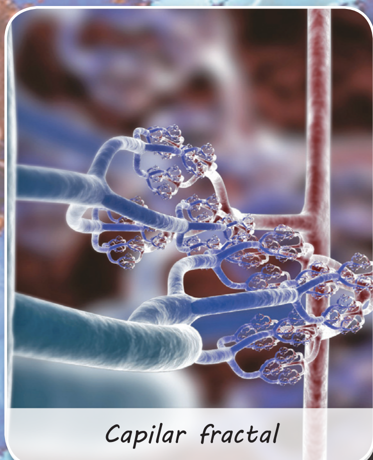
- Reconoce los elementos de una ecuación de primer y segundo grado.
- Determina el valor de la variable dentro de la ecuación e interpreta la solución.
- Analiza la naturaleza de las raíces de una ecuación de segundo grado.
- Representa matemáticamente enunciados utilizando ecuaciones de primer y segundo grado.
- Analiza el algoritmo de la regla de Sarrus para el cálculo del determinante de una matriz.
- Aplica las propiedades de adición y multiplicación en las operaciones con matrices.
- Evalúa las distintos criterios de soluciones de un sistema de ecuaciones (sustitución, igualación y reducción).
- Aplica la regla de Sarrus horizontal en determinantes de orden tres.
- Aplica el criterio de sustitución e igualación en sistemas de ecuaciones lineales.
- Analiza los distintos teoremas empleados para la resolución de una ecuación de grado superior.

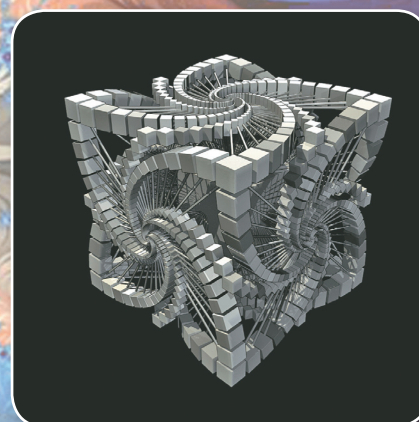
Unidad 4

- Analiza la estructura de una inecuación y evalúa el procedimiento de resolución.
- Plantea matemáticamente enunciados utilizando inecuaciones.
- Determina el valor de la variable en un sistema de inecuaciones de primer o segundo grado.
- Identifica el dominio y rango de una función y evalúa su regla de correspondencia.
- Representa gráficamente la clasificación de funciones, además calcula el valor máximo y mínimo.
- Evalúa los límites laterales y analiza los teoremas utilizados para su resolución.
- Analiza las distintas notaciones de derivadas, además interpreta los teoremas estudiados.
- Utiliza la definición de la derivada para determinar los valores máximos y mínimos de una función.
- Identifica los elementos de una progresión y analiza las relaciones dadas.




La astronomía


Capilar fractal



PALEONTÓLOGOS DE LO IMPOSIBLE



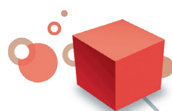












UNIDAD 1

TEORÍA DE EXPONENTES

LEYES DE EXPONENTES

Las leyes de exponentes son aquellas definiciones y teoremas referidos a las operaciones de potenciación y radicación.

POTENCIACIÓN

La potenciación es aquella operación de la forma **b**^{n} donde **b** nos representa a la **base** y **n** al **exponente**.

Definiciones básicas

A) Exponente natural ($n \in \mathbb{N}$)

$$b^n = \begin{cases} \underbrace{b.b.b......b}_{n\text{ veces}}; & \forall\ n \geq 2 \\ b; & n = 1 \end{cases}$$

Ejemplos:
- $2^5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32$
- $(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$

B) Exponente nulo ($n = 0$)

$$b^0 = 1\ ;\ b \neq 0$$

Ejemplos:
- $7^0 = 1$
- $-73^0 = -1$
- $\dfrac{2^0}{3} = \dfrac{1}{3}$
- $(-4)^0 = 1$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = 1$

C) Exponente negativo ($n \in \mathbb{N}$)

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}\ ;\ b \neq 0$$

Ejemplos:
- $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$
- $\dfrac{1}{4^{-2}} = 4^2 = 16$
- $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}} = \dfrac{3^2}{2^3} = \dfrac{9}{8}$

D) Exponente fraccionario

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}\ ;\ b > 0 \wedge m; n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$$

Ejemplos:
- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5} = \sqrt{5}$
- $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$
- $7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2} = \sqrt[5]{49}$

Teoremas

A) Multiplicación de bases iguales

$$b^m . b^n . b^p . b^q = b^{m+n+p+q}$$

Ejemplos:
- $x^3y^3x^4y^3x^2y^2xy^3 = (x^3 . x^4 . x^2 . x)(y^3 . y^3 . y^2 . y^3)$
  $= x^{3+4+2+1}\,y^{3+3+2+3}$
  $= x^{10}y^{11}$
- $ab^2a^3b^3a^2b^4a^4ba^7b^7 = (aa^3a^2a^4a^7)(b^2b^3b^4bb^7)$
  $= a^{1+3+2+4+7}b^{2+3+4+1+7}$
  $= a^{17}\,b^{17}$

B) División de bases iguales

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}\ ;\ b \neq 0$$

Ejemplos:
- $\left(\dfrac{7^2}{7^3}\right)^x = \left(7^{2-3}\right)^x = 7^{-x} = \dfrac{1}{7^x}$
- $\dfrac{7^6}{7^9} = 7^{6-9} = 7^{-3} = \dfrac{1}{7^3}$
- $\dfrac{5^x}{5^{-y}} = 5^{x-(-y)} = 5^{x+y}$

Nota

La multiplicación finita se puede presentar también como:

$\underbrace{x.x.x...x}_{\text{"xy" veces}} . \underbrace{y.y.y...y}_{\text{"xy" veces}}$

Pero su equivalencia simplificada es como sigue:

$x^{xy} . y^{xy}$

El exponente es común, luego:

$(xy)^{xy}$



Atención

Artificios a considerar:
- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
- $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$
- $a = \sqrt[n]{a^n}$





Nota

Forma de aplicación del teorema potencia de potencia.

$$\left(x^{x^{2a}}\right)^{2x^{b}} = x^{x^{2a}.2x^{b}} = x^{2x^{2a+b}}$$

$$(7^4)^{20} - (7^{16})^{5} = 7^{80} - 7^{80} = 0$$

C) Potencia de una multiplicación

$$(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$$

Ejemplos:

- $(xy)^3 = x^3y^3$
- $(2az)^5 = 2^5a^5z^5 = 32a^5z^5$
- $x^{n+2}\,.\,z^{n+2} = (xz)^{n+2}$

D) Potencia de una división

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};\quad b \neq 0$$

Ejemplos:

- $\left(\frac{x}{y}\right)^7 = \frac{x^7}{y^7};\quad y \neq 0$
- $\left(\frac{2x}{5}\right)^3 = \frac{2^3x^3}{5^3} = \frac{8x^3}{125}$
- $\frac{x^{a-b}}{2^{a-b}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{a-b}$

E) Potencia de potencia

$$(((a^m)^n)^p)^q = a^{mnpq}$$

Ejemplos:

- $((a^4)^5)^7 = a^{4\,.\,5\,.\,7} = a^{140}$
- $\left(\frac{a^3.b^5}{c}\right)^2 = \frac{(a^3)^2.(b^5)^2}{c^2} = \frac{a^6.b^{10}}{c^2}; c \neq 0$

F) Potencia para un exponente

Se conoce por la ausencia de signos de agrupación.

$$a^{b^{c^{d^{e}}}} = a^{b^{c^{f}}} = a^{b^{g}} = a^{h}$$

Ejemplo:

- $2^{3^{2^{5^{0}}}} = 2^{3^{2^{1}}} = 2^{3^{2}} = 2^9 = 512$

RADICACIÓN

Es una operación matemática de la forma $\sqrt[n]{b}$, donde **n** es el **índice**, $\sqrt{\;}$ es el símbolo del **radical** y **b** es el **radicando** o la cantidad subradical.

A) Potencia de un radical

$$\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{b}^{\,m}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{2}^{\,3}$
- $\sqrt[4]{x^7} = \sqrt[4]{x}^{\,7}; x > 0$

B) Radicación de una multiplicación

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{8x} = \sqrt[3]{8}\,.\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}$
- $\sqrt[4]{81a} = \sqrt[4]{81}\,.\sqrt[4]{a}$
  $= 3\sqrt[4]{a};\quad a > 0$

C) Cociente de radicales homogéneos

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\quad b \neq 0$$

Ejemplos:

- $\sqrt[5]{\frac{x^{20}}{32}} = \frac{\sqrt[5]{x^{20}}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{x^4}{2}$
- $\sqrt[4]{\frac{x^{16}y^{12}}{81}} = \frac{\sqrt[4]{x^{16}}\,.\sqrt[4]{y^{12}}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{x^4y^3}{3}$

D) Radical de radical

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}} = \sqrt[m.n.p.q]{a}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x}} = \sqrt[3\cdot5]{x} = \sqrt[15]{x}$
- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{y}}} = \sqrt[2\cdot3\cdot4]{y} = \sqrt[24]{y}; y > 0$

E)

$$\sqrt[m]{a^n\sqrt[n]{b}} = \sqrt[m.n]{a^n.b}$$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{a^4\sqrt[4]{b}} = \sqrt[3\cdot4]{a^4.b} = \sqrt[12]{a^4b}$
- $2\sqrt[7]{m^3\sqrt[5]{n^6\sqrt{c}}} = \sqrt[7.5]{(m^3)^5.n^6} = \sqrt[35]{m^{15}.n^6}$
- $\sqrt[5]{a^2\sqrt[4]{b^3\sqrt{c}}} = \sqrt[5.4.2]{(a^2)^{4.2}\,.\,(b^3)^2\,.\,c}$
  $= \sqrt[40]{a^{16}.b^6\,.\,c}$

Recuerda

$$5^{2^{3^{0}}} = 5^{2^{1}} = 5^2 = 25$$

$$3^{-2^{-1}} = 3^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ten en cuenta esta propiedad:

$$\sqrt[a]{x^b\sqrt[c]{x^d\sqrt[e]{x^f}}} = x^{\frac{(b.c+d)e+f}{ace}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^7\sqrt[3]{x^5}}} = x^{\frac{(2.4+7).3+5}{5.4.3}}$$

$$= x^{\frac{50}{60}} = x^{\frac{5}{6}}$$



Ejemplos aplicativos de la potenciación y radicación:

1. Halla P:

$$P = \frac{35\left[5^{\frac{2y}{x-y}} + 5^{\frac{2y}{x-y}}\right]}{\sqrt[x-y]{5^{x+y}}}$$

Resolución:

$$P = \frac{7\left[5^{\frac{2y}{x-y}}.5 + 5^{\frac{2y}{x-y}}.5\right]}{5^{\frac{x+y}{x-y}}}$$

$$P = \frac{7\left[5^{\frac{2y}{x-y}+1} + 5^{\frac{2y}{x-y}+1}\right]}{5^{\frac{x+y}{x-y}}}$$

$$P = \frac{7\left[5^{\frac{2y+x-y}{x-y}} + 5^{\frac{2y+x-y}{x-y}}\right]}{5^{\frac{x+y}{x-y}}} = \frac{7\left[5^{\frac{y+x}{x-y}} + 5^{\frac{y+x}{x-y}}\right]}{5^{\frac{x+y}{x-y}}}$$

$\therefore P = 7(1 + 1) = 14$



2. Reduce:

$$M = \sqrt[2006]{\frac{x^{2006}+y^{2006}}{x^{-2006}+y^{-2006}}}; x \text{ e } y > 0$$

Resolución:

$$M = \sqrt[2006]{\frac{x^{2006}+y^{2006}}{x^{-2006}+y^{-2006}}}$$

$$M = \sqrt[2006]{\frac{x^{2006}+y^{2006}}{\frac{1}{x^{2006}}+\frac{1}{y^{2006}}}}$$

$$M = \sqrt[2006]{\frac{x^{2006}+y^{2006}}{\frac{y^{2006}+x^{2006}}{x^{2006}.y^{2006}}}}$$

$$M = \sqrt[2006]{x^{2006}.y^{2006}} \therefore M = xy$$

Recuerda

Criterio básico de factorización:

Aspa simple:

$t^2 + 2t - 3 = 0$

t +3 → +3t

t −1 → −t

2t

$(t+3)(t-1) = 0$

Se iguala cada factor a cero:

$t = -3 \quad \vee \quad t = 1$



ECUACIÓN EXPONENCIAL

Tiene la variable o la incógnita en el exponente: $a^x = a^b \Rightarrow x = b$; $a \neq \{-1, 0, 1\}$

Ejemplo:

Halla x en: $2^{x-3} = 4^{x-4}$

Resolución:

$2^{x-3} = 4^{x-4} = (2^2)^{x-4} = 2^{2(x-4)} \Rightarrow 2^{x-3} = 2^{2x-8}$

Como las bases son iguales, igualamos exponentes:

$$2x - 8 = x - 3$$
$$2x - x = 8 - 3$$
$$\Rightarrow x = 5$$

ECUACIÓN DE POTENCIA

Tiene la variable o la incógnita en la base: $ax^n = b$; a, n, b son constantes.

A continuación se muestra el modo correcto de usar las propiedades de los exponentes para encontrar la solución de algunas ecuaciones que contienen variables elevados a un exponente racional.

Resuelve: $x^{4,8} = 706$

El caso práctico es usar la igualdad de potencia, escogiendo para ello el exponente que elimine el exponente de x.

Veamos: $x^{4,8} = 706$

Usamos la propiedad de la igualdad de las potencias: $\left(x^{4,8}\right)^{\frac{1}{4,8}} = \left(706\right)^{\frac{1}{4,8}}$

Usa tu calculadora para hallar: $706^{\frac{1}{4,8}} \therefore x = 4$

Nota

Ingresa los datos en tu calculadora según:

7 0 6 x^y [1 ÷ 4 . 8] =

$3,922 \approx 4$

EFECTUAR

1. Simplifica, si $x \neq 0$: $E = \frac{\overbrace{x.x.x...x}^{(2n+3)\text{ veces}}}{\underbrace{x.x.x.x...x}_{(n+1)\text{ veces}}} \cdot x^{2-n}$

2. Simplifica: $E = \frac{b^3.b^7.b^{12}}{b^{5-n}.b^{n+9}}$; $b \neq 0$

3. Indica el valor simplificado de:

$$E = \frac{(x^2)^3(x^4)^5(x^6)^7}{(x^8)^9.(x^5)^{-1}}; \ x \neq 0$$

4. Simplifica: $E = \frac{2^{4-n}+2^{2-n}-2^{1-n}}{2^{1-n}}$

5. Si: $2^a = 3^b$, donde $a \neq b$; calcula el valor de:

$$E = \frac{2^{a+2}+3^{b+1}}{3^{b+1}-2^{a+2}}$$

6. Simplifica: $E = \frac{5.2^{x+2}-2^{x+4}+6.2^{x-1}}{2^{x+5}-15.2^x-2.2^{x+3}}$

7. Sabiendo que $a = 5^{b+1}$, calcula el valor de:

$$E = \frac{5^{2b+1}+5^{2b}}{5^{b+1}+5^{2+b}}$$

8. Simplifica: $E = \frac{n^{n+5}+n^{n+3}+n^{n+1}}{n^{n+4}+n^{n+2}+n^n}$

Problemas resueltos

1 Si se cumple: $x^x = 3^{x^{-1}}$

calcula:

$$M = x^{2x^{x^2}+2}$$

Resolución:

Usamos la propiedad: $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$

$M = x^{2x^{x^2}} \cdot x^2$

Intercambiamos factores: $M = \left(x^{x^2}\right)^{2x^{x^2}}$

Usamos la propiedad: $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

$M = \left((x^x)^x\right)^{(x^x)^x \cdot 2}$

Reemplazamos: $x^x = 3^{x^{-1}}$

$M = \left(\left(3^{x^{-1}}\right)^x\right)^{\left(3^{x^{-1}}\right)^x \cdot 2}$

Usamos la propiedad: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$M = \left(3^{x^{-1} \cdot x}\right)^{\left(3^{x^{-1} \cdot x}\right)2}$

A bases iguales sumamos exponentes.

$M = (3^1)^{(3^1)2} = 3^{3.2} = 3^6 = 729$

$\therefore M = 729$

2 Si: $x^x = 2$,

halla: $B = x^{x^{x+1}} - x^{x^{1+2x}} + x^{x^{x^{x+1}+1}}$

Resolución:

Busquemos la condición:

$x^x = 2$ en la expresión B en forma adecuada.

$B = x^{x^x \cdot x} - x^{x \cdot x^{2x}} + x^{x^{x^x \cdot x} \cdot x}$

$B = x^{x^x \cdot x} - x^{x \cdot x^x \cdot x^x} + x^{x^{x^x \cdot x} \cdot x}$

Usamos la propiedad: $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

$B = (x^x)^{x^x} - (x^x)^{x^x \cdot x^x} + (x^x)^{x^{x^x \cdot x}}$

$B = (x^x)^{x^x} - (x^x)^{x^x \cdot x^x} + (x^x)^{(x^x)^{x^x}}$

Reemplazamos la condición: $x^x = 2$

$B = 2^2 - 2^{2.2} + 2^{2^2} = 4 \quad \therefore B = 4$

3 Calcula el valor de "x", si:

$$8x^3 = 4913$$

Resolución:

Usamos la propiedad de la igualdad de las potencias y escoge un exponente que deshaga el exponente de x.

Ecuación original: $8x^3 = 4913$

Divide ambos miembros entre 8: $x^3 = 614{,}125$

Usamos la propiedad de la igualdad de las potencias:

$(x^3)^{\frac{1}{3}} = (614{,}125)^{\frac{1}{3}}$

Usamos tu calculadora para hallar: $(614{,}125)^{\frac{1}{3}}$ $\quad \therefore x = 8{,}5$

4 De la ecuación exponencial que se transforma en una ecuación de segundo grado, calcula el valor de "x".

$3^{1-x} - 3^x = 2$

Resolución:

Ecuación original: $3^{1-x} - 3^x = 2$

Usamos la propiedad del exponente negativo: $\dfrac{3}{3^x} - 3^x = 2$

Operamos adecuadamente: $3 - 3^{2x} = 2.3^x$

Reemplazamos: $3^x = t$

$$3 - (3^x)^2 = 2 \cdot 3^x$$
$$3 - t^2 = 2t$$
$$t^2 + 2t - 3 = 0$$
$$(t+3)(t-1) = 0$$

Reponemos: $t = 3^x$

$$(3^x + 3)(3^x - 1) = 0$$

Igualamos cada factor a cero:

$3^x + 3 = 0$ (no cumple, $3^x > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$)

$3^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\therefore x = 0$

5 Efectúa:

$$A = \left[\left[\left[(-2)^7\right]^6\right]^5 \ldots\right]^{-7}$$

Resolución:

$A = (-2)^{\overbrace{7\times6\times5\times\ldots\times2\times1\times0\times-1\times-2\times-3\times\ldots\times-7}^{0}}$

$A = (-2)^0 = 1$

6 Reduce:

$$\frac{\sqrt[n]{n^n \cdot \sqrt[n]{n^{n^2} \cdot \sqrt[n]{n^{n^3} \ldots \sqrt[n]{n^{n^{16}}}}}}}{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{(n^4)^{n^4}}}}}}$$

Resolución:

Sea el numerador A: $A = \sqrt[n]{n^n \cdot \sqrt[n]{n^{n^2} \cdot \sqrt[n]{n^{n^3} \ldots \sqrt[n]{n^{n^{16}}}}}}$

Por inducción matemática:

Para 2 radicales:

$\sqrt[n]{n^n \sqrt[n]{n^{n^2}}} = \sqrt[n^2]{n^{n^2+n^2}} = \sqrt[n^2]{n^{2n^2}}$

Para 3 radicales:

$\sqrt[n]{n^n \sqrt[n]{n^{n^2} \sqrt[n]{n^{n^3}}}} = \sqrt[n^3]{n^{(n^2+n^2)n+n^3}} = \sqrt[n^3]{n^{3n^3}}$

⋮

Para 16 radicales:

$A = \sqrt[n]{n^n \sqrt[n]{n^{n^2} \ldots \sqrt[n]{n^{n^3} \ldots \sqrt[n]{n^{n^{16}}}}}} = \sqrt[n^{16}]{n^{16n^{16}}} = n^{16}$

Sea el denominador B:

$B = \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{(n^4)^{n^4}}}}} = \sqrt[n^4]{(n^4)^{n^4}} = n^4$

Nos piden: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{n^{16}}{n^4} = n^{12}$

POLINOMIOS

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es la representación de una o más operaciones algebraicas.

Ejemplos:

$R(x;y) = \frac{7-2x}{7y}$: variables: x e y; constantes: 7; –2; 7; exponentes: 1;1

$P(x;y) = \frac{a^2z^3x^2}{\sqrt{y}} - \frac{3x}{z-1}$: variables: x e y; constantes: a^2, z^3, $-\frac{3}{z-1}$; exponentes: 2; $\frac{1}{2}$;1

Nota

Recuerda que las operaciones algebraicas son:

- x más y: x+y
- x menos y: x–y
- x multiplicado por y (o simplemente, x por y): x.y (o xy)
- x dividido por y: $x \div y$ o $\frac{x}{y}$
- x elevado a y: x^y
- Raíz n–ésima de x: $\sqrt[n]{x}$

Además la representación:
E (x, y): se lee:
Polinomio E de x e y
o
Polinomio E de variables x e y



CLASES DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

A) Por su forma o naturaleza

Expresión algebraica racional. Es aquella que luego de ser reducida o simplificada, presenta en todas las variables del numerador exponentes enteros.

Expresión algebraica racional entera. Los exponentes de todas sus variables son números naturales.

Ejemplo:

- $P(x;y;z) = \frac{3x^2}{y^{-1}} + \frac{z^2x\sqrt{y^2}}{x^{-1}} + 2xy \Rightarrow P(x;y;z) = 3x^2y + z^2x^2y + 2xy$

Expresión algebraica racional fraccionaria. Es cuando por lo menos una de sus variables tiene exponentes enteros negativos en el numerador.

Ejemplo:

$A(x,y) = \frac{7}{x^2} + 2x^2y^{-7} + \frac{1}{3xyz} \quad \Rightarrow \quad A(x,y) = 7x^{-2} + 2x^2y^{-7} + \frac{1}{3z}x^{-1}y^{-1}$

Expresión algebraica irracional. Es cuando al menos una de sus variables tiene exponentes fraccionarios o signo radical.

Ejemplo:

Signo radical

$P(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + 3 - \frac{1}{x^{-1}y^2} \quad \Rightarrow \quad P(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + 3 - \frac{x}{y^2}$

B) Por su número de términos

Monomio: 1 término
Es aquella expresión algebraica racional en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural.

Ejemplos:

- $P(x,y) = \frac{x^3y^{15}}{3}$
- $R(x) = x^3$
- $B(x,y,z) = a^2x^2y^2z^2$

Polinomio: 2 ó más términos.
Es una expresión algebraica racional entera.

Ejemplo:

$T(x,y) = \frac{\sqrt{a}}{2}x^2y^{10}z^{-3} + 7xy^2a^{-\frac{1}{2}} + 10x^3y^7$

Atención

Por el número de términos, los polinomios pueden ser:

$P_{(x)} = 7x + 5$: binomio

$Q_{(x)} = x^9+x^7+y^7$: trinomio

$T_{(x,y)} = x^4+3xy^2+x^2+xy^2$: cuatrinomio

$P_{(x)}$ = "n" términos: polinomio



TÉRMINO ALGEBRAICO

Es una expresión algebraica racional (entera, fraccionaria y/o racional) que consta de una parte numérica (coeficiente) y una parte literal (variables gobernadas solo por las operaciones de multiplicación y potenciación).

Ejemplos:

Coef. Parte literal

- $T(x,y) = \frac{9x^7}{y}$

$\Rightarrow \quad T(x,y) = 9x^7y^{-1}$

Coef. Parte literal

- $A(x,y) = \frac{a^{a^2}x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{y}}$

$\Rightarrow \quad A(x,y) = a^{a^2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$

TÉRMINOS SEMEJANTES

Son aquellos términos algebraicos que sin importar sus coeficientes poseen las mismas variables afectadas del mismo exponente (misma parte literal).

Ejemplos:

Son términos semejantes:		**Igual parte literal:**
$10x^7y^{-1}$; $-8x^7y^{-1}$; $\frac{a}{b}x^7y^{-1}$	$\Rightarrow$	x^7y^{-1}
$3x^{1/2}y^{-1/2}$; $2x^{1/2}y^{-1/2}$; $zx^{1/2}y^{-1/2}$	$\Rightarrow$	$x^{1/2}y^{-1/2}$
$20x^{a+3}y^2z^{1/2}$; $3x^{a+3}y^2z^{1/2}$; $9x^{a+3}y^2z^{1/2}$	$\Rightarrow$	$x^{a+3}y^2z^{1/2}$

Recuerda

Los elementos de un término algebraico:

Signo: $-$; Coeficiente: $\sqrt{7}$; Variables: x, y ; Exponentes: 3, 2

$-\sqrt{7}\,x^3y^2$



GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Es la categoría que se le asigna a un polinomio racional entero.

Tipos de grado

Grado relativo (GR): se da respecto a una de sus variables.
Grado absoluto (GA): o simplemente grado. Se da respecto a todas sus variables.

Grados de un monomio:

Ejemplo: $A(x; y; z) = \frac{b^a}{2^a}x^5y^7z^2$

Grado relativo (GR)	Grado absoluto (GA)
Es el exponente de la variable considerada $GR(x) = 5$; $GR(y) = 7$; $GR(z) = 2$	Es igual a la suma de los grados relativos de sus variables. $GA(A) = GR(x) + GR(y) + GR(z)$ $\Rightarrow GA(A) = 5 + 7 + 2 = 14$

Grados de un polinomio:

Ejemplo: $P(x;y;z) = \underbrace{\frac{a}{b}x^3yz^3}_{GA=7} - \underbrace{a^bx^7y^{10}}_{GA=17} + \underbrace{\frac{3}{5}x^2y^9z^7}_{GA=18} + \underbrace{\frac{ab}{c}w^3x^{11}yz^3}_{GA=15}$

Grado relativo (GR)	Grado absoluto (GA)
Es el mayor exponente de la variable en referencia. $GR(x) = 11$; $GR(y) = 10$; $GR(z) = 7$	Es el mayor grado absoluto de uno de sus términos. $GA(P) = 18$



Atención

Para los polinomios idénticos se cumple que al asignar cualquier sistema de valores a la variable o variables a considerar, obtendremos el mismo valor numérico en ambos miembros.

Ejemplo:
Sean: $A(x - 7) + B(x + 3) \equiv x + 2$; calcula: $A + B$

Asignamos valores adecuados a la variable x:
Para: $x = 7 \Rightarrow A(7-7) + B(7+3) = 7+2 \Rightarrow B = 0,9$
Para: $x = -3 \Rightarrow A(-3-7) + B(-3+3) = -3+2 \Rightarrow A = 0,1$
$\therefore A + B = 1$

POLINOMIOS ESPECIALES

1. Polinomio completo

Es aquel que posee todos los exponentes sucesivos de la variable considerada, desde el mayor hasta el cero inclusive.

Ejemplos:

- $P(x) = 5x^4 + 2x^0 - 3x^2 + 7x^3 + x^1$
- $C(x; y; z) = 100x^2y^4 + 20xy^2z^3 - y^3z^2 + y^1z^{10} + 20x^7zy^0$

Luego, $P_{(x)}$ y $C_{(x,y,z)}$ tienen respecto a **x** e **y** todos los exponentes desde 4 hasta cero, luego diremos que los polinomios son completos referido a **x** e **y**, respectivamente.

2. Polinomio ordenado

Es aquel que está ordenado respecto a una variable llamada ordenatriz, donde los exponentes de la mencionada variable van aumentando o disminuyendo.

Ejemplo:

$F(x; y) = 10x^5y^{10} + 7x^3y^{20} + 21x^2y^5 - x^1y^7 + 100y^{17}$

F(x; y) es un polinomio ordenado en forma descendente respecto a la variable ordenatriz "x".

3. Polimonio homogéneo

Es aquel que tiene todos sus términos no semejantes del mismo grado.



Ejemplo:

$Z(x;y)=\frac{a^b}{\sqrt{z}}\underbrace{x^7y^4}_{GA=11}-\frac{b^a}{\sqrt{b}}\underbrace{xy^{10}}_{GA=11}+\underbrace{x^{11}}_{GA=11}+\underbrace{y^{11}}_{GA=11}$

El polinomio Z(x; y) es homogéneo de grado once.

4. Polinomios idénticos

Son aquellos cuyos coeficientes que afectan a sus términos semejantes son iguales.

Ejemplos:

1. $R(x) = (x+7)^2$; $T(x) = x^2 + 14x + 49$: son polinomios idénticos $\Rightarrow R(x) \equiv T(x)$
2. $A(x;y) = x^3 + y^3$; $B(x;y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$: son polinomios idénticos $\Rightarrow A(x;y) \equiv B(x;y)$

5. Polinomio indenticamente nulo

Es aquel cuyos coeficientes de todos sus términos son iguales a cero.

$$P(x;y;z) = Ax^2y^2 + Bxz^2 + Cy^3z \equiv 0$$
$$\Leftrightarrow A = B = C = 0$$

Ejemplo:

Si: $P(x) = (a-2)x^9 + (a+b-3)x^7 + (c+1)x^2y \equiv 0$, determina: $a + b + c$

Se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a+b-3=0 \Rightarrow b=1 \\ c+1=0 \Rightarrow c=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a+b+c=2+1+(-1)=2 \\ \therefore a+b+c=2 \end{array}$$

VALOR NUMÉRICO

Es el valor o constante real que se obtiene luego de reemplazar las variables de una expresión algebraica por ciertos números.

Ejemplo:

De la expresión: $T(x;y)=\frac{7xy+3xy^2}{x-1}$,

halla:

$$T(-1;2)=\frac{7(-1)(2)+3(-1)(2)^2}{-1-1}=13$$

$$T(a;b)=\frac{7(a)(b)+3(a)(b)^2}{a-1}=\frac{ab(3b+7)}{a-1}$$

$$T(2;2)=\frac{7(2)(2)+3(2)(2)^2}{2-1}=52$$

$$T(4;3)=\frac{7(4)(3)+3(4)(3)^2}{4-1}=64$$

Cambio de variable

Las variables pueden ser reemplazadas por otros polinomios.

Caso I:

Si: $P(x+5) = 1 - 9x$, determina: $P(4)$

Resolviendo la ecuación: $x + 5 = 4 \Rightarrow x = -1$

Al reemplazar:

$P(4) = 1 - 9(-1) = 10 \quad \therefore P(4) = 10$

Caso II:

Si: $T(x) = 3x^2 - 1$, halla: $T(x+1)$

Reemplazamos: x por (x + 1) en T(x):

$T(x) = 3x^2 - 1$

$T(x+1) = 3(x+1)^2 - 1 = 3(x^2 + 2x + 1) - 1$

$\therefore T(x+1) = 3x^2 + 6x + 2$

Caso III:

Si: $S(x-7) = 4x - 21$, determina: $S(3x+1)$

- Se reemplaza $x - 7$ por $3x + 1$ previa preparación del polinomio:

$S(x-7) = 4(x-7+7) - 21 \Rightarrow$ haciendo: $x - 7 = y \Rightarrow S(y) = 4(y+7) - 21$

$\Rightarrow S(3x+1) = 4(3x+1+7) - 21 = 12x + 11$

- O también: $x-7 = 3x+1 \Rightarrow x = 3x+8$

$S(3x+1) = 4(3x+8) - 21 = 12x + 32 - 21 = 12x + 11$

$\therefore S(3x+1) = 12x + 11$

Nota

Los polinomios:
$P(x) = a_o x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$
$Q(x) = b_o x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$

son idénticos $\Leftrightarrow$
$a_o = b_o$; $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$



Recuerda

Propiedades notables.
En un polinomio de grado"n" con $a_o \neq 0$:

$P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

Suma de coeficientes: $\sum$ Coef.

$\sum$ Coef (P) = P(1)

Término independiente: TI

$TI(P) = P(0) = a_n$

Donde:
a_o: coeficiente principal (coeficiente de la variable con mayor exponente)

Si: $a_o = 1 \Rightarrow P(x)$: Polinomio mónico



Observación

Los polinomios idénticamente nulos se anulan para cualquier valor de su variable.

Problemas resueltos

1 Determina el grado del siguiente polinomio:

$Z(x) = (x + 2)(x^8 + 4)(x^{27} + 8)...$ **n** paréntesis.

Sabiendo que su término independiente es $(512)^4$.

Resolución:

El polinomo puede expresarse como:

$$Z(x) = \left(x^{1^3} + 2^1\right)\left(x^{2^3} + 2^2\right)\left(x^{3^3} + 2^3\right)...\left(x^{n^3} + 2^n\right)$$

Su grado G(Z) se calculará como:

$$G(Z) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad ...(I)$$

Por dato, su término independiente es: $(512)^4$

$$TI(Z) = Z(0) = 2^1.2^2.2^3. ....2^n = 2^{1 + 2 + 3 +....+ n}$$

Donde: $2^{\frac{n(n+1)}{2}} = (512)^4$

$$2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{9(4)}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 9(4)$$

$$n(n + 1) = 8(8 + 1)$$

$$\Rightarrow n = 8$$

Reemplazamos en (I):

$$G(Z) = \left(\frac{8(8+1)}{2}\right)^2 = 1296$$

$\therefore G(Z) = 1296$

2 Determina el valor de "n" en el siguiente polinomio:

$$P\left(\frac{7-x}{5}\right) = \left(\frac{8x-21}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{nx}{7} - 2\right) + \frac{n}{7}(x-7)$$

Sabiendo que la relación de la suma de coeficientes con el término independiente es como – 1 a 7 (**n**: impar).

Resolución:

La suma de coeficientes ($\sum$ coef.) se expresa como:

$$\sum \text{coef.}(P) = P(1) = \left(\frac{8(2)-21}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{n(2)}{7} - 2\right) + \frac{n}{7}(2-7)$$

$x = 2$

$$\sum \text{coef.}(P) = (-1)^{n-2}\, 2\left(\frac{n-7}{7}\right) - \frac{5n}{7} \quad ...\ (1)$$

Tener en cuenta que:

n: impar (1;3;5;7...) ⇒ n – 2: ¿Par o Impar?

Probemos con algunos valores:

Si: $n = 3 \Rightarrow n - 2 = 3 - 2 = 1$
$n = 5 \Rightarrow n - 2 = 5 - 2 = 3$
$n = 7 \Rightarrow n - 2 = 7 - 2 = 5$
$\therefore$ (n – 2) es impar

⇒ Podemos afirmar: $(-1)^{n-2} = -1 \quad ...\ (2)$

(2) en (1):

$$\sum \text{coef.}(P) = -2\left(\frac{n-7}{7}\right) - \frac{5n}{7} \quad ...(3)$$

El término independiente (TI) se calcula como:

$$TI(P) = P(0) = \left(\frac{8(7)-21}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{n(7)}{7} - 2\right) + \frac{n}{7}(7-7)$$

$x = 7$

$$TI(P) = 7^{n-2}(n - 2) \quad ...(4)$$

Por dato del problema:

$$\frac{\Sigma\text{coef.}(P)}{TI(P)} = \frac{-1}{7} \quad ...(5)$$

(3) y (4) en (5): $\dfrac{-2\left(\frac{n-7}{7}\right) - \frac{5n}{7}}{7^{n-2}(n-2)} = -\dfrac{1}{7}$

Simplificamos:

$$\frac{n+2}{7^{n-2}(n+2)} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{7^{n-2}} = \frac{1}{7^1};\ n \neq 2$$

$\Rightarrow n - 2 = 1$

$\therefore n = 3$

3 Del polinomio completo y ordenado descendentemente:

$S(x) = x^{4\alpha + 3\phi - 3} - 12x^{2\alpha + 5\phi + 6} + 20x^{5\alpha - \phi + 5} + ...$

indica: $\left(\dfrac{\alpha}{\phi}\right)^{\frac{\phi}{5}+1}$

Resolución:

El exponente del primer término (izquierda) es igual al del segundo aumentado en uno, así mismo este es igual al del tercer término también aumentado en uno; por ser el polinomio completo y ordenado en forma descendente.

$(5\alpha - \phi + 5) + 1 = 2\alpha + 5\phi + 6 \Rightarrow \alpha = 2\phi \quad ...(1)$

$(2\alpha + 5\phi + 6) + 1 = 4\alpha + 3\phi - 3 \Rightarrow \phi - \alpha = -5 \quad ...(2)$

(1) en (2):

$\phi - 2\phi = -5 \Rightarrow \phi = 5$

En (1) $\Rightarrow \alpha = 10$

Nos piden:

$$\left(\frac{\alpha}{\phi}\right)^{\frac{\phi}{5}+1} = \left(\frac{10}{5}\right)^{\frac{5}{5}+1} = 2^2 = 4 \quad \therefore \left(\frac{\alpha}{\phi}\right)^{\frac{\phi}{5}+1} = 4$$

4 Determina los valores de α, β, γ, ψ y ξ para que el polinomio sea idénticamente nulo.

$D(x) = 6x^7 + 2\alpha x^3 - 13x^5 - 10x + \gamma x^3 - \beta x^7 + \xi + \beta x^5 - 11x^3 + \gamma x^5 + 1 - \psi x$

Resolución:

Agrupamos términos semejantes:

$$D(x) = (6x^7 - \beta x^7) + (\beta x^5 + \gamma x^5 - 13x^5) + (2\alpha x^3 + \gamma x^3 - 11x^3) - (\psi x + 10x) + (\xi + 1)$$



Sacamos los factores comunes: x^7, x^5, x^3, x, respectivamente.

$D(x) = (6-\beta)x^7 + (\beta+\gamma-13)x^5 + (2\alpha+\gamma-11)x^3 - (\psi+10)x + (\xi+1)$

Si el polinomio es idénticamente nulo, se cumple que $D(x) \equiv 0$.

Veamos:

$6-\beta = 0 \Rightarrow \beta = 6$
$\beta+\gamma-13 = 0 \Rightarrow \gamma = 7$
$2\alpha+\gamma-11 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$
$\psi+10 = 0 \Rightarrow \psi = -10$
$\xi+1 = 0 \Rightarrow \xi = -1$

5 Encuentra los valores de **m** y **n** para que el siguiente polinomio sea homogéneo:
$P(x;y) = x^3y^{n+2} + 5x^ny^{m-1} - xy^{m+3}$

Resolución:

$P(x;y) = x^3y^{n+2} + 5x^ny^{m-1} - xy^{m+3}$

Como es homogéneo, se cumple: $\underbrace{n+5}_{I} = \underbrace{n+m-1}_{II} = \underbrace{m+4}_{III}$

(I) = (II): $n+5 = m+n-1$
$m = 6$

(II) = (III): $n+m-1 = m+4$
$n = 5$

$\therefore m = 6 \wedge n = 5$

6 Sea P(x) un polinomio lineal de coeficientes positivos, tal que se cumple:
$P(x) \,.\, P(-x) = 25 - 9x^2$
Halla: P(2)

Resolución:

Dato $P(x) = ax + b$ ...(I)
$P(x) \,.\, P(-x) = 25 - 9x^2$ ...(II)
Reemplazando **x** por **–x** en (I): $\Rightarrow P(-x) = -ax + b$

Reemplazamos en (II):
$(b+ax)(b-ax) = 25 - 9x^2$
$(b+ax)(b-ax) = (5+3x)(5-3x)$

Luego: $P(x) = ax + b = 3x + 5$

Nos piden:
$P(2)$: $x = 2 \Rightarrow P(2) = 3(2) + 5 = 11$

7 Sea el polinomio: $P(x-1) = x^2 + ax + 1$
Además: $P(2) - P(1) = 7$
Halla: a + 3

Resolución:

$P(2) = P(3-1) = 3^2 + 3a + 1$
$P(2) = 10 + 3a$
$P(1) = P(2-1) = 2^2 + 2a + 1$
$P(1) = 5 + 2a$

Reemplazamos:
$10 + 3a - 5 - 2a = 7$
$5 + a = 7$
$a = 2$
Piden: $a + 3 = 2 + 3 = 5$

8 Si: $P(2x-1) = 4x + 5$,
calcula: P(0) + P(3)

Resolución:

Hacemos un cambio variable:
$2x - 1 = a$
$2x = a + 1$
$x = \frac{a+1}{2}$

Reemplazamos:
$P(a) = 4\left(\frac{a+1}{2}\right) + 5$

$P(a) = 2a + 7$

Luego:
$P(0) = 7 \wedge P(3) = 2(3) + 7 = 13$

Piden:
$P(0) + P(3) = 7 + 13 = 20$

9 Si: $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$,
halla: $P(x+1) + P(-x+1)$

Resolución:

$P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$

Sabemos que: $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Luego:
$P(x) = (x-1)^3 - 6x$ ...(α)

Hacemos: $x \rightarrow x + 1$

Reemplazamos en (α):
$P(x+1) = (x+1-1)^3 - 6(x+1)$
$P(x+1) = x^3 - 6x - 6$ ... (I)

Hacemos: $x \rightarrow -x + 1$

Reemplazamos en (α):
$P(-x+1) = (-x+1-1)^3 - 6(-x+1)$
$P(-x+1) = (-x)^3 - 6x - 6$ ...(II)

Sumando (I) y (II):
$P(x+1) + P(-x+1) = -12$

10 En el siguiente polinomio:
$P(x;y) = x^ay^{b-1} + x^{a+1}y^b + x^{a+2}y^{b+2} + x^{a+3}y^{b+1}$
$GR(x) = 10 \wedge GA(P) = 13$
Calcula: GR(y)

Resolución:

$\underbrace{GR(x)}_{a+3} = 10 \Rightarrow a = 7$

$P(x;y) = \underbrace{x^7y^{b-1}}_{b+6} + \underbrace{x^8y^b}_{8+b} + \underbrace{x^9y^{b+2}}_{11+b} + \underbrace{x^{10}y^{b+1}}_{11+b}$

$\Rightarrow GA(P) = 11 + b = 13 \Rightarrow b = 2$

$\therefore GR(y) = b + 2 = 2 + 2 = 4$

PRODUCTOS NOTABLES

> **Nota**
> Por el cambio de posición de los términos, no cambia la igualdad.
> $(m - n)^2 = (n - m)^2$

CONCEPTO

También se les conoce como identidades algebraicas. Son productos que están indicados y de esta manera es fácil recordar su desarrollo sin hacer la operación de la multiplicación.

PRODUCTOS NOTABLES MÁS IMPORTANTES

1. Binomio al cuadrado (tcp: trinomio cuadrado perfecto)

$$(m \pm n)^2 = m^2 \pm 2mn + n^2$$

Ejemplo:

- $[(x + 2) - (5x + 3)]^2 = [(5x + 3) - (x + 2)]^2 = (4x + 1)^2 = [(4x)^2 + 2(4x)(1) + 1^2] = 16x^2 + 8x + 1$

Corolario: **Identidades de Legendre**

$$(m + n)^2 + (m - n)^2 = 2(m^2 + n^2) \qquad (m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn \qquad (m + n)^4 - (m - n)^4 = 8mn(m^2 + n^2)$$

Ejemplo:

- $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^4 - \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^4 = (a^2 + a^{-2})^4 - (a^2 - a^{-2})^4 = 8(a^2)\left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\left(a^2\right)^2 + \left(a^{-2}\right)^2\right) = 8(a^4 + a^{-4})$

> **Recuerda**
> En algunos casos conviene descomponer la diferencia de cuadrados, así:
> $\left(a^2x^2 - \frac{1}{9}\right) = (ax)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$
> $= \left(ax + \frac{1}{3}\right)\left(ax - \frac{1}{3}\right)$



2. Diferencia de cuadrados

$$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$$

Ejemplo:

- $[(3x + 2y) + (x + y)]\,[(3x + 2y) - (x + y)] = (3x + 2y)^2 - (x + y)^2$

3. Identidad de Stevin (multiplicación de binomios con término común)

$$(m + a)(m + b) \equiv m^2 + (a + b)m + ab \qquad (am + b)(cm + d) \equiv acm^2 + (ad + bc)m + bd$$

Ejemplos:

- $((x + a) + 2)((x + a) - 3) = (x + a)^2 + (2 + (-3))(x + a) + 2(-3) = (x + a)^2 - (x + a) - 6$
- $(3a - 1)(2a + 3) = (3)(2)a^2 + (3(3) + (-1)(2))a + (-1)(3) = 6a^2 + 7a - 3$

$$(m + a)(m + b)(m + c) = m^3 + (a + b + c)m^2 + (ab + ac + bc)m + abc$$

Ejemplo:

- $(a - 1)(a + 3)(a - 2) = a^3 + ((-1) + 3 + (-2))a^2 + (-1)3 + ((-1)(-2) + 3(-2))a + (-1)(3)(-2)$
  $= a^3 + 0a^2 + (-7)a + 6 = a^3 - 7a + 6$

4. Desarrollo de un binomio al cubo

$$(m + n)^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \qquad (m - n)^3 = m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$$

Ejemplo:

- $(2m + n)^3 = (2m)^3 + 3(2m)^2n + 3(2m)n^2 + n^3$
  $= 8m^3 + 12m^2n + 6mn^2 + n^3$

Ejemplo:

- $(\sqrt[3]{7} - 1)^3 = (\sqrt[3]{7})^3 - 3(\sqrt[3]{7})^2(1) + 3(\sqrt[3]{7})(1)^2 - (1)^3$
  $= 6 - 3\sqrt[3]{49} + 3\sqrt[3]{7}$

> **Nota**
> Considera también lo siguiente:
> $(m+n)^3 + (m-n)^3 = 2m(m^2 + 3n^2)$
> $(m+n)^3 - (m-n)^3 = 2n(3m^2 + n^2)$

Corolario: **Identidades de Cauchy** (forma abreviada del desarrollo de un binomio al cubo)

$$(m + n)^3 = m^3 + n^3 + 3mn(m + n) \qquad (m - n)^3 = m^3 - n^3 - 3mn(m - n)$$



Ejemplo:

- $(a^2 + \frac{1}{a^3})^3 = (a^2)^3 + (\frac{1}{a^3})^3 + 3(a^2)(\frac{1}{a^3})(a^2 + \frac{1}{a^3})$

$$= a^6 + \frac{1}{a^9} + \frac{3}{a}(a^2 + \frac{1}{a^3})$$

Ejemplo:

- $(a^a - b^b)^3 = (a^a)^3 - (b^b)^3 - 3(a^a)(b^b)(a^a - b^b)$

$$= a^{3a} - b^{3b} - 3a^a b^b(a^a - b^b)$$

5. Producto de un binomio por un trinomio

Suma de cubos

$$(m + n)(m^2 - mn + n^2) = m^3 + n^3$$

Ejemplo:

- $(p + q^2)(p^2 - pq^2 + (q^2)^2) = p^3 + (q^2)^3 = p^3 + q^6$

Diferencia de cubos

$$(m - n)(m^2 + mn + n^2) = m^3 - n^3$$

Ejemplo:

- $(\sqrt[3]{f} - \sqrt[6]{g})\left((\sqrt[3]{f})^2 + \sqrt[3]{f}\sqrt[6]{g} + (\sqrt[6]{g})^2\right) = f - \sqrt{g}$

Recuerda

Expresión general del desarrollo de una suma o diferencia de cubos.

$$(m^x \pm n^y)(m^{2x} \mp m^x n^y + n^{2y}) \equiv m^{3x} \pm n^{3y}$$



6. Trinomio al cuadrado

$$(m + n + p)^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2(mn + mp + np)$$

Ejemplo:

- $(a - 2b - 3c)^2 = (a + (-2b) + (-3c))^2 = a^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(a(-2b) + a(-3c) + (-2b)(-3c))$

$$= a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 2(-2ab - 3ac + 6bc) = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 2(6bc - 2ab - 3ac)$$

7. Identidades de Lagrange

Con dos variables

$$(a^2 + b^2)(m^2 + n^2) = (am + bn)^2 + (an - bm)^2$$

Ejemplo:

- $(d^2 + 9)(q^2 + 16) = (d^2 + 3^2)(q^2 + 4^2) = (dq + 3(4))^2 + (4d - 3q)^2 = (12 + dq)^2 + (4d - 3q)^2$

Con tres variables

$$(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2) = (am + bn + cp)^2 + (an - bm)^2 + (ap - cm)^2 + (bp - cn)^2$$

Ejemplo:

- $(r^2 + 9 + s^{-2})(\frac{1}{r^2} + q^2 + 4) = (r^2 + 3^2 + (s^{-1})^2)\left(\left(\frac{1}{r}\right)^2 + q^2 + 2^2\right)$

$$= \left(r\left(\frac{1}{r}\right) + 3q + (s^{-1})2\right)^2 + \left(rq - 3\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \left(2r - s^{-1}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + (3(2) - (s^{-1})q)^2$$

$$= \left(1 + 3q + \frac{2}{s}\right)^2 + \left(rq - \frac{3}{r}\right)^2 + \left(2r - \frac{1}{sr}\right)^2 + \left(6 - \frac{q}{s}\right)^2$$

8. Identidades de Argand

$$(m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1) = m^4 + m^2 + 1$$

$$(m^2 + mn + n^2)(m^2 - mn + n^2) = m^4 + m^2n^2 + n^4$$

Ejemplos:

- $(4t^2 + 2t + 1)(4t^2 - 2t + 1) = ((2t)^2 + (2t) + 1)((2t)^2 - (2t) + 1) = (2t)^4 + (2t)^2 + 1 = 16t^4 + 4t^2 + 1$
- $(t^2 + 2nt + 4n^2)(t^2 - 2nt + 4n^2) = (t^2 + t(2n) + (2n)^2)(t^2 - t(2n) + (2n)^2) = t^4 + 4t^2n^2 + 16n^4$

Recuerda

Ten cuenta la siguiente expresión; que es una nueva forma de escribir la Identidad de Argand:

$$(m^{2t} + m^tn^s + n^{2s})(m^{2t} - m^tn^s + n^{2s}) \equiv m^{4t} + m^{2t}n^{2s} + n^{4s}$$



9. Identidades de Gauss (identidades auxiliares)

$$m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = (m + n + p)(m^2 + n^2 + p^2 - mn - mp - np)$$

Ejemplo:

- Si: $\alpha\beta\gamma = 1$; $\alpha + \beta + \gamma = 2$; $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 4$. Calcula: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

Resolución:
Reemplazamos los valores en la Identidad de Gauss: despejamos $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma)}_{2}\,\underbrace{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}_{3} - \underbrace{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)}_{4}) + 3\underbrace{\alpha\beta\gamma}_{1} = 2(3 - 4) + 3 = 1$$

$\therefore \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 1$

$$(m + n)(m + p)(n + p) + mnp = (m + n + p)(mn + mp + np)$$

Atención

También se cumple la siguiente identidad condicional:

Si: $m + n + p = 0$
$\Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$



Ejemplo:

- Si: $p + q + r = 0$ y $pqr = -3$, calcula: $(p + q)^2(p + r)^2(q + r)^2$

Resolución:
Según las condiciones dadas, se puede hacer uso de la identidad.

$$(p + q)(p + r)(q + r) = \underbrace{(p + q + r)}_{0}(pq + pr + qr) - \underbrace{pqr}_{-3} = -(-3) = 3$$

$\therefore (p + q)^2(p + r)^2(q + r)^2 = 9$

10. Identidades condicionales

$$\text{Si: } m + n + p = 0, \text{ entonces: } m^2 + n^2 + p^2 = -2(mn + mp + np)$$

Ejemplo:

- Si: $a + b + c = 0$; calcula: $E = \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a + b + c) - 4(ab + ac + bc)^2}$

Resolución:
Reemplazamos adecuadamente la identidad deducida por la condición.

$$E = \frac{(-2(ab + ac + bc))^2}{\underbrace{(a + b + c)}_{0} - (2(ab + ac + bc))^2} = \frac{4(ab + ac + bc)^2}{-4(ab + ac + bc)^2} = -1$$



$$\text{Si: } m^2 + n^2 + p^2 = mn + mp + np, \text{ entonces: } m = n = p \quad ; (m,n \text{ y } p \in \mathbb{R})$$

Ejemplo:

Si: $p^2 + q^2 + r^2 = pq + pr + qr$,

calcula: $T = \dfrac{2pqr}{(p+q)(p+r)(q+r)}$

Resolución:

Según la condición que nos dan; concluimos: $p = q = r$

Luego:

$$T = \frac{2ppp}{(p+p)(p+p)(p+p)} = \frac{2p^3}{(2p)^3} = \frac{2p^3}{2^3p^3} = \frac{1}{4}$$

11. Trinomio al cubo

$$(m+n+p)^3 = m^3 + n^3 + p^3 + 3m^2n + 3m^2p + 3mn^2 + 3n^2p + 3mp^2 + 3np^2 + 6mnp$$

$$(m+n+p)^3 = m^3 + n^3 + p^3 + 3(m+n)(m+p)(n+p)$$

$$(m+n+p)^3 = m^3 + n^3 + p^3 + 3(m+n+p)(mn+mp+np) - 3mnp$$

$$(m+n+p)^3 = 3(m+n+p)(m^2+n^2+p^2) - 2(m^3+n^3+p^3) + 6mnp$$

Ejemplo:

$(2x + 3y + z)^3 = (2x)^3 + (3y)^3 + (z)^3 + 3(2x + 3y)(2x + z)(3y + z)$

$= 2^3x^3 + 3^3y^3 + z^3 + 3(2x + 3y)(2x + z)(3y + z)$

$= 8x^3 + 27y^3 + z^3 + 3(2x + 3y)(2x + z)(3y + z)$

EFECTUAR

1. Efectúa:
   $A = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) + 1$
2. Efectúa:
   $E = \sqrt[4]{1 + 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)}$
3. Efectúa:
   $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 2^2) + 16$
4. Efectúa:
   $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2) + y^4$
5. Efectúa:
   $(a + 1)^2(a - 1)^2 + (2a^2 - 1)$
6. Efectúa:
   $(x + a)(x - a)(x^2 + a^2)(x^4 + a^4) + a^8$
7. Efectúa:
   $(3x + 4)^2 - (4 - 3x)^2$
8. Efectúa:
   $T = (\sqrt[4]{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)(\sqrt[4]{3} - 1)$
9. Efectúa:
   $P = (x - 3)^2 + 6(x - 1) - x^2$
10. Reduce:
    $M = (x + 2)^2 + (x + 3)^2 - 2(x^2 + 5x) + 3$
11. Halla el valor de:
    $R = (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2$
12. Calcula:
    $\sqrt{(x + y)^2 - (x - y)^2 - 4xy}$
13. Encuentra el valor de:
    $H = \dfrac{(x + 4)^2 - (x - 6)^2 + 20}{2x}; x > 0$
14. Efectúa:
    $D = (x - 3)(x + 3) - (x + 2)(x - 2) + 5$
15. Reduce:
    $M = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{7} - 3)(\sqrt{7} + 3)$
16. Reduce:
    $P = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) + y^8$

Problemas resueltos

1 Calcula:

$$M = \frac{(4a+b)^2 - (4a-b)^2}{8ab}$$

Resolución:

$$M = \frac{(4a+b)^2 - (4a-b)^2}{8ab}$$

Por Legendre:

$$M = \frac{4(4a)(b)}{8ab} = \frac{16ab}{8ab} = 2$$

2 Si: $x + \frac{1}{x} = 3$; halla: $x^3 + \frac{1}{x^3}$

Resolución:

Del dato:

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

Elevamos al cubo:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x\frac{1}{x}\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{3} = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 9 = 18$$

Entonces: $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

3 Si: $a + b = 3$ y $ab = 1$;
halla: $S = (a^2 + b^2)^2$

Resolución:

Datos:

$ab = 1$

$a + b = 3$

Elevamos al cuadrado:

$$a + b = 3$$

$$(a + b)^2 = 3^2$$

$$a^2 + \underbrace{2ab}_{1} + b^2 = 9$$

$$a^2 + b^2 = 9 - 2 = 7$$

Nos piden:

$S = (a^2 + b^2)^2 = 7^2 = 49$

4 Evalúa:

$$R = \sqrt[32]{1 + 80(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)}$$

Resolución:

$$R = \sqrt[32]{1 + \underbrace{80}_{9^2 - 1}(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)}$$

$$R = \sqrt{1 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{(9^2-1)(9^2+1)}_{(9^4-1)}(9^4+1)}_{(9^8-1)}(9^8+1)}_{(9^{16}-1)}}$$

$$R = \sqrt[32]{1 + 9^{16} - 1} = \sqrt[32]{(3^2)^{16}} = 3$$

5 Reduce:

$E = (x + 2)^2(x + 4)^2 - (x + 5)^2(x + 1)^2 - 6x(x + 6)$

Resolución:

$E = (x + 2)^2(x + 4)^2 - (x + 5)^2(x + 1)^2 - 6x(x + 6)$

$E = [(x + 2)(x + 4)]^2 - [(x + 5)(x + 1)]^2 - 6x(x + 6)$

$E = (x^2 + 6x + 8)^2 - (x^2 + 6x + 5)^2 - 6(x^2 + 6x)$

Sea: $x^2 + 6x = a$

Reemplazando:

$E = (a + 8)^2 - (a + 5)^2 - 6a$

$E = a^2 + 16a + 64 - a^2 - 10a - 25 - 6a$

$E = 39$

6 Si: $(a + 1)^2 = (\sqrt{3} + 2)a$;

calcula: $N = \frac{(a^2+1)^2}{a^4+1}$

Resolución:

Dato: $(a + 1)^2 = (\sqrt{3} + 2)a$

$a^2 + 2a + 1 = a\sqrt{3} + 2a$

$a^2 + 1 = a\sqrt{3}$

Al cuadrado:

$(a^2 + 1)^2 = 3a^2$

$a^4 + 2a^2 + 1 = 3a^2$

$a^4 + 1 = a^2$

Nos piden:

$$N = \frac{(a^2+1)^2}{a^4+1} = (a\sqrt{3})^2$$

$\therefore$ N = 3

COCIENTES NOTABLES

X

DEFINICIÓN

Son aquellas divisiones algebraicas de dos expresiones binómicas o de expresiones que adoptan esta forma en las cuales el cociente y el residuo de la división se obtienen sin efectuar la división (la cual puede ser exacta o inexacta), por esta razón también se les denomina **cocientes notables.**

FORMAS GENERALES DE UN COCIENTE NOTABLE

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} \vee \frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q} = \frac{(x^p)^{\frac{m}{p}} \pm (a^q)^{\frac{n}{q}}}{x^p \pm a^q} \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

En este último caso para que represente un cociente notable se debe cumplir:

$$\text{n.º términos del cociente notable} = N = \frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{exponentes iguales}$$

Se presentan los siguientes casos:

Primer caso: división exacta

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}$$

Por el teorema del resto: $d = 0 \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a$; entonces: $R = a^m - a^m = 0$

Ejemplos:

- $\dfrac{x^5 - a^5}{x - a} = x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4$
- $\dfrac{x^{18} - y^{12}}{x^3 - y^2} = \dfrac{(x^3)^6 - (y^2)^6}{x^3 - y^2} = (x^3)^5 + (x^3)^4y^2 + (x^3)^3(y^2)^2 + (x^3)^2(y^2)^3 + (x^3)^1(y^2)^4 + (y^2)^5$

  $= x^{15} + x^{12}y^2 + x^9y^4 + x^6y^6 + x^3y^8 + y^{10}$

Segundo caso: división inexacta

$$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a}$$

Por el teorema del resto: $d = 0 \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a$; entonces: $R = a^m + a^m = 2a^m$

Ejemplo:

$\dfrac{x^5 + 32}{x - 2}$

El resto es: $R = (2)^5 + 32 = 32 + 32 = 64 \Rightarrow \therefore \dfrac{x^5 + 32}{x - 2} = \dfrac{x^5 + 2^5}{x - 2} = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + \dfrac{64}{x - 2}$

Tercer caso:

$\dfrac{x^m - a^m}{x + a}$

Por el teorema del resto: $d = 0 \Rightarrow x + a = 0 \Rightarrow x = -a$; entonces: $R = (-a)^m - a^m$

En este caso hay dos posibilidades:

I. Si m es par (división exacta)

$R = (-a)^m - a^m = a^m - a^m = 0$

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots - a^{m-1}$$

Nota

- Los cocientes notables tienen la característica de ser polinomios homogéneos.

Atención

- El desarrollo de un cociente notable consta de un número de términos igual al exponente de las bases en el dividendo.
- El grado del cociente es igual al exponente de la base en el dividendo disminuido en uno.



Observación

Para **m** par o impar:

$\frac{-}{-} = +; +; +; \ldots; +$

Atención

Los exponentes van disminuyendo de uno en uno para la primera variable mientras que para la segunda van aumentando de uno en uno.



Observación

Para el tercer caso.
Para **m**: par (división exacta)

$\frac{-}{+} = +; -; +; - \ldots +; -$



Ejemplo: $\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$

II. Si m es impar (división inexacta)

$R = (-a)^m - a^m = -a^m - a^m = -2a^m$

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 - ... + a^{m-1} - \frac{2a^m}{x + a}$$

Ejemplo: $\frac{x^3 - 8}{x + 2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{16}{x + 2}$

Aquí el residuo es: $(-2)^3 - 8 = -16$

Observación

Para el cuarto caso.
Para **m**, impar (división exacta)
$\frac{+}{+} = -,+,-,+,-,+...-, +$



Cuarto caso

$\frac{x^m + a^m}{x + a}$

Por el teorema del resto: $d = 0 \Rightarrow x + a = 0 \Rightarrow x = -a$; entonces: $R = (-a)^m + a^m$

En este caso hay dos posibilidades:

I. Si m es par (división inexacta)

$R = a^m + a^m = 2a^m$

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 - ... - a^{m-1} + \frac{2a^m}{x + a}$$

Nota

Al aplicar la fórmula del término general "t_k", la división debe adaptarse a la forma general de un cociente notable.

Ejemplo: $\frac{x^4 + a^4}{x + a} = x^3 - x^2a + xa^2 - a^3 + \frac{2a^4}{x + a}$

II. Si m es impar (división exacta)

$R = -a^m + a^m = 0$

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - ... + a^{m-1}$$

Ejemplo: $\frac{x^5 + 32}{x + 2} = \frac{x^5 + 2^5}{x + 2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$



Recuerda

- Si **m**: impar ⇒ ∃ un término central (tc) :

$t_c = t_{\frac{m+1}{2}}$

- Si **m** par ⇒ hay dos términos centrales:

$t_{c1} = t_{\frac{m}{2}} \wedge t_{c2} = t_{\frac{m}{2}+1}$

CÁLCULO DEL TÉRMINO GENERAL

Sea: $\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$

Un término de lugar **k** del cociente notable es:

$t_k = \square\, x^{m-k} \,.\, a^{k-1}$ $\quad 1 \leq k \leq m$

(□ → Signo)

Donde:
x: primer término del divisor
a: segundo término del divisor
m: n.° de términos del cociente

Regla para determinar el signo

1. Si d(x) = x – a; todos los términos del CN son positivos
2. Si d(x) = x + a; se tiene:

 a) Términos de lugar impar son positivos.
 b) Términos de lugar par son negativos.



Problemas resueltos

1 Halla el grado absoluto del término de lugar cinco del siguiente cociente notable:

$$\frac{\left(x^{3^4}\right)^3-\left(m^{3^2}\right)^3}{x^{3^3}-m^3}$$

Resolución:

- Donde la forma adecuada de un cociente notable:

$$\frac{x^{3^4.3}-m^{3^2.3}}{x^{3^3}-m^3}=\frac{x^{3^3.3^2}-m^{3.3^2}}{x^{3^3}-m^3}=\frac{\left(x^{3^3}\right)^{3^2}-(m^3)^{3^2}}{x^{3^3}-m^3}=\frac{\left(x^{3^3}\right)^9-(m^3)^9}{x^{3^3}-m^3}$$

- El término de lugar cinco está dado por:

$$t_5=\left(x^{3^3}\right)^{9-5}(m^3)^{5-1}=x^{108}\,.\,m^{12}$$

- El grado absoluto de tal término será: $GA(t_5)=108+12=120$

$\therefore GA(t_5)=120$

2 Calcula el término independiente del desarrollo: $\dfrac{\frac{x^6}{64}-\frac{1}{x^6}}{\frac{x}{2}-\frac{1}{x}}$

Resolución:

- Una forma adecuada de expresar la expresión es:

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{x}\right)^6}{\frac{x}{2}-\frac{1}{x}}=\left(\frac{x}{2}\right)^5+\left(\frac{x}{2}\right)^4\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^3\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$+\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^4+\left(\frac{1}{x}\right)^5$$

Como se podrá observar no existe al menos un término que tengan exponentes iguales.

$\therefore$ No tiene término independiente.

3 Determina qué lugar ocupa dentro del desarrollo del cociente notable, el término que contiene a **x** e **y** con exponentes iguales.

$$\frac{x^{436}-y^{1090}}{x^2-y^5}$$

Resolución:

Para calcular el lugar del término donde los exponentes son iguales, hacemos:

$$\frac{(x^2)^{218}-(y^5)^{28}}{x^2-y^5}\Rightarrow t_k=(x^2)^{218-k}\quad(y^5)^{k-1}$$

Luego: $2(218-k)=5(k-1)\Rightarrow k=63$

$\therefore$ En el lugar 63 existe el término cuyos exponentes son iguales.

4 Determina el término independiente del cociente notable siguiente:

$$Q(a)=\frac{(a+2)^{100}-2^{100}}{a}$$

Resolución:

$$\frac{(a+2)^{100}-2^{100}}{(a+2)-2}=(a+2)^{99}+(a+2)^{98}\,2$$
$$+(a+2)^{97}2^2+\ldots+\ (a+2)2^{98}+2^{99}$$

- Recuerda que para el cálculo del término independiente, reemplazamos: $a=0$

$$TI=Q(0)=2^{99}+2^{98}.2+2^{97}.2^2+\ldots+2.2^{98}+2^{99}$$

$$=\underbrace{2^{99}+2^{99}+2^{99}+\ldots+2^{99}+2^{99}}_{n=100\ \Rightarrow\ \text{términos}}$$

$\therefore TI=100.2^{99}$

5 Efectúa: $P=\dfrac{x^{69}+x^{66}+x^{63}+\ldots+1}{x^{21}+x^{18}+x^{15}+\ldots+1}\cdot\dfrac{x^{12}-1}{x^{24}-x^{12}+1}$

Resolución:

- Expresamos adecuadamente:

$$P=\frac{(x^3)^{23}+(x^3)^{22}+(x^3)^{21}+\ldots+1}{(x^3)^7+(x^3)^6+(x^3)^5+\ldots+1}\cdot\frac{x^{12}-1}{x^{24}-x^{12}+1}$$

$$P=\frac{\dfrac{(x^3)^{24}-1}{x^3-1}}{\dfrac{(x^3)^8-1}{x^3-1}}\cdot\frac{x^{12}-1}{x^{24}-x^{12}+1}=\frac{x^{72}-1}{x^{24}-1}\cdot\frac{x^{12}-1}{\underbrace{x^{24}-x^{12}+1}_{(x^{12})^2-(x^{12})+1}}$$

$$P=\frac{x^{72}-1}{(x^{12}+1)(x^{12}-1)}\cdot\frac{x^{12}-1}{\dfrac{(x^{12})^3+1}{x^{12}+1}}=\frac{x^{72}-1}{x^{36}+1}=\frac{(x^{36})^2-1}{x^{36}+1}$$

$P=x^{36}-1\qquad\therefore P=x^{36}-1$

6 Determina el valor de (**m** + **n**) del cociente notable:

$$\frac{x^m-y^n}{x-y^6};$$

si el grado del término de lugar **2k** es el doble del grado del término de lugar **k**.

Resolución:

- El cociente notable se puede expresar como:

$$\frac{x^m-(y^6)^{\frac{n}{6}}}{x-y^6}\Rightarrow t_k=x^{m-k}(y^6)^{k-1}\qquad\ldots(1)$$
$$t_{2k}=x^{m-2k}(y^6)^{2k-1}\qquad\ldots(2)$$

- Del enunciado y de (1) y (2):

$$\underbrace{GA(t_{2K})}=2\underbrace{GA(t_k)}$$

$$m-2k+6(2k-1)=2(m-k+6k-6)$$
$$m=6$$

- Del número de términos:

$m=\dfrac{n}{6}\Rightarrow n=36\qquad\therefore m+n=42$

FACTORIZACIÓN

CONCEPTO

Es la operación que consiste en transformar un polinomio como una multiplicación indicada de sus factores primos.

Factorización →

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = (x + 4)(x - 3)(x + 2)(x - 1)$$

← Multiplicación

Observación

Factor primo:
Es aquel factor que se le reconoce por:

- Presentar coeficientes racionales.
- Es aquel que tiene por lo menos una variable.
- Es divisible por si mismo y por la unidad.



CONTEO DE FACTORES

Número de factores primos

Para calcularlo se considera solo las bases de los factores, estos deben contener a la variable.

Ejemplos:

- $H(x) = 7x^3y\,(x - 2y)(2x + 1)(x^3 + 5)$

  5 factores primos

- $P(a,b) = ab^3(a + 2)(b^3 - 5)(a^3 - 3b)$

  5 factores primos

Número de factores totales (n.° factores)

Sea el polinomio:
$R(x, y, z) = (x^2 + a)^m(y - 2b)^n(z + c)^p$

$$\text{n.° factores} = (m + 1)(n + 1)(p + 1)$$

Ejemplo:
$B(x, y) = (x - y)^3(2x + 1)(x - 3y^2)^3$
$\Rightarrow$ n.° factores $= (3 + 1)(1 + 1)(3 + 1) = 32$ factores

Número de divisores o factores algebraicos (n.° factores alg.)

Estos divisores o factores solo consideran la parte algebraica y ninguna constante.

Sea el polinomio factorizado:

$R(x, y, z) = (x + 2)^m$
$(y^3 + u)^n\,(z - 7)^p$

$$\text{n.° factores alg.} = (n + 1)(m + 1)(p + 1) - 1$$

Ejemplo:

$(2x + 1)^2(3y - 1)$ {
$2x + 1$
$3y - 1$
$(2x + 1)(3y - 1)$
$(2x + 1)^2$
$(2x + 1)^2(3y - 1)$

Factores algebraicos totales

n.° factores alg. $= (2 + 1)(1 + 1) - 1 = 5$

Nota

El polinomio debe estar expresado en función de sus factores primos para hacer el respectivo conteo de factores.

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

A) Factor común y/o agrupamiento de términos

Se emplea cuando todos los términos del polinomio tienen un factor en común o agrupando términos en forma conveniente se logra obtener factores comunes.

Ejemplos:

- $A(x,y) = x^3y^2 + 2xy^2 + 2x^2y$
  $= xy\,(x^2y + 2y + 2x)$

- $B(x,y) = ax + by + bx + ay$
  $= x(a + b) + y(b + a)$
  $= (a + b)(x + y)$

B) Identidades

I. Diferencia de cuadrados

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$$

Ejemplo:

- $x^8 - y^6 = (x^4)^2 - (y^3)^2 = (x^4 - y^3)(x^4 + y^3)$

II. Suma de cubos

$$m^3 + n^3 = (m + n)\,(m^2 - mn + n^2)$$

Ejemplo:

- $27a^3 + b^3 = (3a)^3 + (b)^3$
  $= (3a + b)(9a^2 - 3ab + b^2)$



I. Diferencia de cuadrados

$$m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

Ejemplo:

- $a^{3b} - b^{3a} = (a^b)^3 - (b^a)^3$
  $= (a^b - b^a)(a^{2b} + a^b b^a + b^{2a})$

IV. Trinomio cuadrado perfecto (tcp)

$$m^2 \pm 2mn + n^2 = (m \pm n)^2$$

Ejemplo:

- $4x^{2b} + 4x^b y + y^2 = (2x^b)^2 + 2(2x^b)y + y^2$
  $= (2x^b + y)^2$

C) Aspa simple

Válido para aquellas expresiones transformables a las siguientes formas:

$Q(x) = Ax^{2n} \pm Bx^n \pm C$ $\qquad W(x;y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n \pm Cy^{2n}$; A, B y $C \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$

Solución esquemática:

$W(x;y) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$

$A_1x^m \quad C_1y^n \quad A_2C_1x^my^n +$

$A_2x^m \quad C_2y^n \quad A_1C_2x^my^n$

Bx^my^n

$\therefore\ W(x;y) = (A_1x^m + C_1y^n)(A_2x^m + C_2y^n)$

Ejemplo:

- Factoriza: $Z(x) = (x + 3)^2 + 4x(x + 3) + 3x^2$

  Resolución: $Z(x) = (x + 3)^2 + 4x(x + 3) + 3x^2$

  $x + 3 \quad 3x \quad 3x(x + 3)$

  $x + 3 \quad x \quad x(x + 3)$

  $4x(x + 3)$

  $Z(x) = (x + 3 + 3x)(x + 3 + x)$

  $\therefore Z(x) = (4x + 3)(2x + 3)$

D) Aspa doble

Válido para aquellos polinomios transformables a la siguiente forma:

$$V(x;y) = Gx^{2m} + Hx^my^n + Iy^{2n} + Jx^m + Ky^n + L \quad ; \ \{m,n\} \in \mathbb{Z}^+$$

Solución esquemática:

$V(x,y) = Gx^{2m} + Hx^my^n + Iy^{2n} + Jx^m + Ky^n + L$

$G_1x^m \quad I_1y^n \quad L_1$

(1) (3) (2)

$G_2x^m \quad I_2y^n \quad L_2$

Verificación del 2.º, 4.º y 5.º término según el desdoblamiento conveniente de los factores primos.

(1) : $(G_1x^m)(I_2y^n) + (G_2x^m)(I_1y^n) = (G_1I_2 + G_2I_1)x^my^n = Hx^my^n$

(2): $(I_1y^n)(L_2) + (I_2y^n)(L_1) = (I_1L_2 + I_2L_1)y^n = Ky^n$

(3): $(G_1x^m)(L_2) + (G_2x^m)(L_1) = (G_1L_2 + G_2L_1)x^m = Jx^m$

Tomando la suma horizontal:

$\therefore V(x;y) = (G_1x^m + I_1y^n + L_1)(G_2x^m + I_2y^n + L_2)$

Ejemplo:

- Factoriza: $L(x;y) = 1 - 10y^4 - 3y^2 + 9x^8y^2 + 7x^{16} + 8x^8$

  Resolución: $L(x;y) = 7x^{16} + 9x^8y^2 - 10y^4 + 8x^8 - 3y^2 + 1$

  $7x^8 \quad -5y^2 \quad 1$

  (1) (3) (2)

  $1x^8 \quad 2y^2 \quad 1$

Verificamos:

(1) $14x^8y^2 - 5x^8y^2 = 9x^8y^2$

(2) $-5y^2 + 2y^2 = -3y^2$

(3) $7x^8 + x^8 = 8x^8$

Suma horizontal:

$\therefore L(x;y) = (7x^8 - 5y^2 + 1)(x^8 + 2y^2 + 1)$

Nota

Los factores reciben el nombre de:
$x + 1$: factor lineal
$x^2 + 1$: factor cuadrático

Atención

Solo se realizará la factorización de polinomios en el campo de los números racionales ($\mathbb{Q}$).
(Coeficientes enteros o fraccionarios).
A menos que nos indiquen lo contrario.

Recuerda

Ax^{2m} y Cy^{2n}: términos fijos

Nota

En este método, si falta algún término, se completará con ceros.

- Gx^{2m}, Iy^{2n}, L: términos fijos.

Nota

- En este método se completa con ceros si falta algún término.

  Términos fijos: $G.x^{4n}$, .K

E) Aspa doble especial

Se emplea para factorizar expresiones:

$$T(x) = Gx^{4n} + Hx^{3n} + Ix^{2n} + Jx^{n} + K$$

Solución esquemática:

$T(x) = Gx^{4n} + Hx^{3n} + Ix^{2n} + Jx^{n} + K$

G_1x^{2n} Z_1x^{n} K_1

(2) (1) (3)

G_2x^{2n} Z_2x^{n} K_2

Comprobamos:

(1) $G_2K_1x^{2n} + G_1K_2x^{2n} = Sx^{2n} \Rightarrow Ix^{2n} - Sx^{2n} = Zx^{2n} \begin{cases}(Z_1x^n)\\(Z_2x^n)\end{cases}$

(2) $G_1Z_2x^{3n} + G_2Z_1x^{3n} = Hx^{3n}$

(3) $Z_1K_2x^{n} + Z_2K_1x^{n} = Jx^{n}$

Tomamos la suma horizontal:

$\therefore T(x) = (G_1x^{2n} + Z_1x^{n} + K_1)(G_2x^{2n} + Z_2x^{n} + K_2)$

Ejemplo:

- Factoriza: $D(x) = 3+10x^4 + 14x^8 + x^6$

  Solución:

  $D(x) = 14x^8 + x^6 + 10x^4 + 0x^2 + 3$

  $7x^4$ $-3x^2$ 3

  (2) (1) (3)

  $2x^4$ x^2 1

  Comprobamos:

  (1) $6x^4 + 7x^4 = 13x^4 \Rightarrow$ falta: $-3x^4 = (-3x^2)(x^2)$

  $(3x^2)\ (-x^2)$

  (2) $-6x^6 + 7x^6 = x^6$

  (3) $3x^2 - 3x^2 = 0x^2$

  $\therefore\ D(x) = (7x^4 - 3x^2 + 3)(2x^4 + x^2 + 1)$

Recuerda

Coeficiente principal: es aquel coeficiente de la variable con MAYOR EXPONENTE.

mayor exponente

$P(x) = 3x^5 + 5x^{10} + 3x - 1$

Coeficiente principal 5.



F) Divisores binomios (Evaluación binómica)

Se emplea para factorizar polinomios solo de una variable, este polinomio puede ser de cualquier grado. Como su nombre lo indica, admiten factores lineales de la forma: $ax \pm b$

Se emplea el criterio de divisibilidad:

> **a** es un cero de $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$
> Luego: $(x - a)$ es un divisor o factor de $P(x)$ (**teorema del factor**)

Caso general de obtener dos posibles ceros racionales (PCR)

$$PCR = \pm \left\{\frac{\text{Divisores del término independiente de x en P(x)}}{\text{Divisores del coeficiente principal en P(x)}}\right\}$$

Procedimiento:

i) Determina los PCR

ii) Deducir el factor que anula al polinomio: "a" es cero $\Rightarrow P(a) = 0 \Rightarrow (x - a)$ es un factor.

iii) Aplica el método de Ruffini y asi determina el otro factor. Este método lo emplearás tantas veces como ceros tenga el polinomio.

Observación

El número de ceros debe coincidir con el grado del polinomio.



Ejemplo:

Factoriza:

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 3x -10$

Resolución:

i) $PCR = \pm\{1;2;5;10\}$

ii) Determinamos el cero del polinomio:

$x = 1 \Rightarrow P(1) = (1)^3 + 6(1)^2 + 3(1) - 10=0$ (CERO)

"1" es un cero del polinomio $\Rightarrow (x - 1)$ es un factor

iii) $P(x) \div (x - 1)$

	1	6	3	−10
1		1	7	10
	1	7	10	0
	2.°	1.°	0.°	

$P(x) = (x - 1)(x^2 + 7x + 10)$

x   5

x   2

$\therefore P(x) = (x - 1)(x + 5)(x + 2)$

Problemas resueltos

1 Factoriza:
$H(x; y) = 10x^2 + 11xy - 6y^2 - x - 11y - 3$
e indica la suma de coeficientes de sus factores primos.

Resolución

$H(x; y) = 10x^2 + 11xy - 6y^2 - x - 11y - 3$

$5x \quad -2y \quad -3$

$2x \quad 3y \quad 1$

$\Rightarrow H(x; y) = \underbrace{(5x - 2y - 3)}_{\text{suma de coef. } 0}\underbrace{(2x + 3y + 1)}_{\text{suma de coef. } 6}$

$\therefore$ La suma de coeficientes de sus factores primos es 6.

2 Factoriza:
$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$
El coeficiente principal de uno de sus factores primos es:

Resolución

$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$

$x = 1$ hace $P(x) = 0$, entonces:

	2	–5	1	2
x = 1		2	–3	–2
	2	–3	–2	0

$(x - 1)(2x^2 - 3x - 2) \quad \Rightarrow \quad P(x) = (x - 1)(2x + 1)(x - 2)$

$2x \quad 1$

$x \quad -2$

$\therefore$ Coef. principal puede ser 1 o 2.

3 Factoriza: $R(x) = 2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 3$
Calcula la suma de los términos independientes de los factores primos obtenidos.

Resolución:

Por aspa doble especial:

$2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 3$

$2x^2 \quad -3x \quad 1$

$x^2 \quad -x \quad 3$

Se debe tener: $10x^2$

Se tiene: $7x^2$

Falta: $3x^2$

$R(x) = (2x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 3)$

$2x \quad -1$

$x \quad -1$

$R(x) = \underbrace{(2x - 1)(x - 1)(x^2 - x + 3)}_{\text{Factores primos}}$

Piden la suma de sus términos independientes:

$\therefore \ \Sigma$ Coef. $= (-1) + (-1) + (3) = 1$

4 Factoriza: $P(x) = x^7 + c^3x^4 - c^4x^3 - c^7$,
luego indica el factor primo repetido.

Resolución

$P(x) = x^7 + c^3x^4 - c^4x^3 - c^7$

Agrupamos:

$P(x) = x^4(x^3 + c^3) - c^4(x^3 + c^3)$

$= (x^3 + c^3)(x^4 - c^4)$

$= (x + c)(x^2 - xc + c^2)(x^2 + c^2)(x^2 - c^2)$

$= (x + c)(x^2 - xc + c^2)(x^2 + c^2)(x + c)(x - c)$

$= (x + c)^2(x^2 - xc + c^2)(x^2 + c^2)(x - c)$

$\therefore$ El factor primo repetido es: $x + c$

5 Factoriza E(x) e indica un factor primo:
$E(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

Resolución

$E(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

Factorizamos por Ruffini:

	1	–1	–1	–1	–2
–1		–1	2	–1	2
	1	–2	1	–2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$\Rightarrow \underbrace{(x + 1)}(x - 2)(x^2 + 1)$ $\therefore$ un factor primo es: $x + 1$

6 Factoriza: $F(x) = (2x^2 - 3x)^2 - 14(2x^2 - 3x) + 45$,
e indica un factor primo.

Resolución:

$F(x) = (2x^2 - 3x)^2 - 14(2x^2 - 3x) + 45$

$(2x^2 - 3x) \quad -9$

$(2x^2 - 3x) \quad -5$

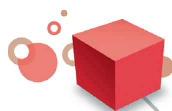
$F(x) = (2x^2 - 3x - 9)(2x^2 - 3x - 5)$

$2x \quad 3 \qquad 2x \quad -5$

$1x \quad -3 \qquad 1x \quad +1$

$F(x) = (2x + 3)(x - 3)(2x - 5)(x + 1)$

$\therefore$ Un factor primo es $2x + 3$



UNIDAD 2

MCD Y MCM – FRACCIONES ALGEBRAICAS

Recuerda

1. Si: $P(x,y,z)$ y $Q(x,y,z)$ son primos entre si (PESÍ)

   Se cumple:

   $MCD(P(x, y, z), Q(x, y, z)) = 1$

   y

   $MCM(P(x, y, z), Q(x, y, z)) = P(x, y, z) . Q(x, y, z)$

2. Dados dos polinomios: $M(x,y,z)$ y $N(x,y,z)$

   Se cumple:

   $M(x, y, z) . N(x, y, z) = MCD(M, N) . MCM(M, N)$



Nota

Representación de una fracción:

$F = \frac{A}{B}$ → A: Polinomio dividiendo; B: Polinomio divisor

Veamos:

- $\frac{x-1}{x^2+5x+6}$; $\frac{101}{2x+1}$

  Son fracciones algebraicas.

- $\frac{x+1}{2}$; $\frac{x^3-2x+1}{3}$

  No son fracciones algebraicas.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El MCD de dos o más polinomios es otro polinomio de mayor grado posible que divide exactamente a cada uno de ellos.

Ejemplo: $MCD(x^3y^6z, x^9y^5) = x^3y^5$

Procedimiento a emplear para calcular el MCD de dos o más polinomios

1. Factorizar los polinomios dados.
2. El producto de los factores primos con su menor exponente nos dará el MCD de los polinomios.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El MCM de dos o más polinomios es otro de menor grado posible que sea divisible por cada uno de los polinomios dados.

Ejemplo: $MCM(x^3y^6z, x^9xz^5) = x^9y^6z$

Procedimiento a emplear para calcular el MCM de dos o más polinomios

1. Factoriza los polinomios dados.
2. El producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente nos dará el MCM de los polinomios.

Ejemplo:

Determina el MCD y el MCM de los polinomios: $A(t) = t^3 + t^2 - t - 1$ y $Q(t) = t^3 - t^2 - 2t$

Resolución:

Procedimiento:

1. $A(t) = t^3 + t^2 - t - 1 = t^2(t + 1) - (t + 1) = (t + 1)(t^2 - 1) = (t + 1)^2(t - 1)$

   $Q(t) = t^3 - t^2 - 2t = t(t^2 - t - 2) = t(t - 2)(t + 1)$

2. $MCD(A; Q) = t + 1$ y $MCM(A; Q) = (t + 1)^2(t - 1)(t - 2)t$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas racionales enteras llamadas numerador (dividendo) y denominador (divisor) donde este último es a lo menos de primer grado.

Clases de fracciones algebraicas

A) Fracciones propias: cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Ejemplo:

$\frac{7m^2 - 3m + 7}{m^4 + m - 11}$; $N^o_{(m)} < D^o_{(m)}$

B) Fracciones impropias: cuando el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador.

Ejemplo:

$\frac{10m^7 - 5m^2 + 1}{m^3 + 7m - 1}$; $N^o(m) > D^o(m)$

C) Fracciones homogéneas: son aquellas que tienen igual denominador.

Ejemplo:

$\frac{4x-1}{x^3+2}$; $\frac{x^7-3}{x^3+2}$; $\frac{1}{x^3+2}$

D) Fracciones heterogéneas: son aquellas que tienen diferentes denominadores.

Ejemplo:

$\frac{3}{2x-1}$; $\frac{x^3-2}{x^2+7}$; $\frac{x+2}{x+1}$



E) Fracciones equivalentes: dos fracciones son equivalentes si toman los mismos valores numéricos para todos los valores atribuidos a sus variables.

Ejemplo:

$$\frac{x+2}{x-1} \quad \text{y} \quad \frac{x^2+9x+14}{x^2+6x-7}$$

F) Fracción compleja o compuesta: es aquella que tiene una o más fracciones en el numerador o en el denominador.

Ejemplo: $$\frac{x-\dfrac{1}{2x-1}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3x-1}}$$

G) Fracción de valor constante: para cualquier valor de sus variables el valor numérico que asume la fracción es invariable.

Sea:

$$Z(x, y) = \frac{Ax - Bxy^3 + Cy}{A_1x - Pxy^3 - Ry}$$

que asume un valor constante.

Entonces:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{P} = \frac{C}{-R} = \text{Invariable}$$

Operaciones con fracciones algebraicas

Suma o diferencia

- De fracciones homogéneas:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} \pm \frac{D}{B} = \frac{A \pm C \pm D}{B}$$



Ejemplo:

$$\frac{4x-5}{x+1} - \frac{x+8}{x+1} = \frac{4x-5-(x+8)}{x+1} = \frac{3x-13}{x+1}$$

- De fracciones heterogéneas:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} \pm \frac{E}{P} = \frac{ADP \pm CBP \pm EBD}{BDP}$$



Ejemplo:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x^2-2x+1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)+3(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{5x+1}{(x-)^2(x+1)}$$

Multiplicación

$$\left(\frac{A}{M}\right)\left(\frac{B}{N}\right)\left(\frac{C}{P}\right) = \frac{ABC}{MNP}$$



Ejemplo:

$$\left(\frac{x^2+2x}{x+4}\right)\left(\frac{x^2+4x}{x^2+5x+6}\right) = \frac{x(x+2)x(x+4)}{(x+4)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2}{x+3}$$

División

$$\frac{A}{M} \div \frac{C}{D} = \left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{D}{C}\right) = \frac{AD}{BC}$$

o también: $$\frac{\dfrac{A}{B}}{\dfrac{C}{D}} = \frac{AD}{BC}$$



Ejemplo:

$$\frac{2t^2-13t+15}{t^2-25} \div \frac{t}{t+5} = \frac{(2t-3)(t-5)}{(t+5)(t-5)} \div \frac{t}{t+5}$$

$$= \frac{(2t-3)(t+5)}{(t+5)t} = \frac{2t-3}{t}$$

DESCOMPOSICIÓN DE FRACCIONES EN SUMA DE FRACCIONES PARCIALES

Es transformar una fracción racional a una suma de fracciones simples o parciales.

Se tiene que tener en cuenta:

I. Es necesario que la fracción sea propia, si no lo fuese, efectuar la división de modo que tengamos un polinomio entero más una fracción propia.

II. La fracción debe ser irreductible.

III. El polinomio del denominador debe ser factorizado.

Casos que se presentan

Caso I: el denominador presenta factores de primer grado no repetido de la forma: x ± a

$$\underbrace{\frac{N(x)}{(x\pm a)(x\pm b)}}_{} = \underbrace{\frac{A}{x\pm a} + \frac{B}{x\pm b}}_{}$$

2 factores de 1.er grado ⇒ 2 fracciones parciales

Caso II. el denominador presenta factores de primer grado repetido de la forma: $(x \pm a)^n$

$$\underbrace{\frac{N(x)}{(x\pm a)^3}}_{} = \underbrace{\frac{A}{x\pm a} + \frac{B}{(x\pm a)^2} + \frac{C}{(x\pm a)^3}}_{}$$

3.er grado ⇒ 3 fracciones parciales



Atención

- Tres signos:

$$\frac{\oplus(x-2)}{\ominus(x^2-3x+1)} \text{ con } \ominus \text{ delante}$$

Signo del numerador

Signo del denominador

Signo de la fracción

- En toda fracción si se altera cualquier par de sus signos, tendremos como resultado otra fracción equivalente.

$$\frac{m-2n}{m^2-3n} = \frac{-(2n-m)}{-(3n-m^2)} = \frac{2n-m}{3n-m^2}$$

- $\frac{+M}{+N} = +\frac{M}{N} = \frac{M}{N}$

  $\frac{-M}{-N} = +\frac{M}{N} = \frac{M}{N}$

  $\frac{-M}{+N} = -\frac{M}{N} \wedge \frac{+M}{-N} = -\frac{M}{N}$

Nota

- Transformación de una fracción impropia a una fracción propia.

$$\frac{x^2+x-13}{x+3} = \frac{(x^2+x-6)-7}{x+3}$$

$$= \frac{(x-2)(x+3)}{x+3} - \frac{7}{x+3}$$

$$\frac{x^2+x-13}{x+3} = x-2-\frac{7}{x+3}$$

Nota

Ejemplo:

Descomponer en fracciones parciales: $\frac{7x+29}{x^2+9x+14}$

Resolución:

Factorizamos el denominador:

$$\frac{7x+29}{(x+2)(x+7)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+7}$$

$$= \frac{A(x+7)+B(x+2)}{(x+2)(x+7)}$$

Dando valores convenientes para:

7x + 29 = A(x + 7) + B(x + 2)

Para: x = –7: –49 + 29 = –5B

⇒ B = 4

Para: x = –2: –14 + 29 = 5A

⇒ A = 3

Luego:

$$\frac{7x+29}{x^2+9x+14} = \frac{3}{x+2} + \frac{4}{x+7}$$

Problemas resueltos

1 Calcula el MCD de los siguientes polinomios:

$A(x) = x^2 + 3x - 10$

$B(x) = x^4 - 25x^2$

$C(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$

Resolución:

$A(x) = (x - 2)(x + 5)$

$B(x) = x^2(x^2 - 25) = x^2(x - 5)(x + 5)$

$C(x) = x(x^2 + 4x - 5) = x(x - 1)(x + 5)$

$\therefore$ MCD(A(x); B(x); C(x)) = x + 5

2 El MCM de dos polinomios A(x) y B(x) es:

$x^4 - 5x^2 + 4$ y

Su MCD es: $x^2 + x - 2$.

Calcula el número de factores primos de A(x) . B(x).

Resolución:

Para dos polinomios se cumple:

A(x) . B(x) = MCD(A; B) . MCM(A; B)

$= (x^2 + x - 2) . (x^4 - 5x^2 + 4)$

$$\begin{array}{ll} x \quad 2 & x^2 \quad -4 \\ x \quad -1 & x^2 \quad -1 \end{array}$$

$A(x) . B(x) = (x + 2)(x - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 1)$

$A(x) . B(x) = (x + 2)(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1)$

$A(x) . B(x) = (x + 2)^2(x - 1)2(x - 2)(x + 1)$

Por lo tanto:

A(x) . B(x) tiene 4 factores primos.

3 Determina el valor de **a** si el MCD de:

$(x^2 + 14x + 48)$ y $(x^2 + 8x + 12)$ es $(x + a)$

Resolución:

Factorizamos los polinomios:

$x^2 + 14x + 48 = (x + 6)(x + 8)$

$$\begin{array}{ll} x & 8 \\ x & 6 \end{array}$$

$x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$

$$\begin{array}{ll} x & 6 \\ x & 2 \end{array}$$

El MCD de ambos polinomios es: (x + 6)

$\therefore a = 6$

4 Reduce:

$$E = \left[\frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}} - \frac{x}{x + \frac{1}{x+1}}\right] \cdot \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]$$

Resolución:

Dada la fracción:

$$E = \left[\frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}} - \frac{x}{x + \frac{1}{x+1}}\right] \cdot \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]$$

$$E = \left[\frac{x(x+1)}{x+1-x} - \frac{x(x+1)}{x(x+1)+1}\right]\left[\frac{(x+1)^2 - x}{x(x+1)^2}\right]$$

$$E = x(x+1)\left[1 - \frac{1}{x^2+x+1}\right]\left[\frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2}\right]$$

$$E = \left[\frac{x^2+x+1-1}{x^2+x+1}\right]\left[\frac{x^2+x+1}{x+1}\right]$$

$$E = \frac{x(x+1)}{x+1}$$

$\therefore E = x$

5 Calcula A – B si se cumple que:

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \equiv \frac{7x-4}{x^2+x-6}$$

Resolución:

$$\frac{A(x-2) + B(x+3)}{(x-2)(x+3)} \equiv \frac{7x-4}{(x-2)(x+3)}$$

$(A + B)x - 2A + 3B \equiv 7x - 4$

$\Rightarrow \quad A + B = 7 \;\wedge\; 3B - 2A = -4$

$\Rightarrow \quad A = 5 \;\wedge\; B = 2$

$\therefore \quad A - B = 5 - 2 = 3$

6 Si la fracción es independiente de **x** e **y**, calcula m.

$$F(x; y) = \frac{mx + 12y}{4x - 6y}$$

Resolución:

Dada la fracción:

$$F(x; y) = \frac{mx + 12y}{4x - 6y}$$

Si es independiente de x e y se cumple:

$$\frac{m}{4} = \frac{12}{-6} \Rightarrow m = -8$$

FACTORIAL DE UN NÚMERO

El factorial de un número natural se establece por el producto de todos los naturales en forma consecutiva desde el número dado hasta la undidad.

Notaciones: "Factorial de" : $\lfloor\ $, !

Ejemplos:

$\lfloor 4 = 4! = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1$ $\quad \lfloor 7 = 7! = 7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1$ $\quad \lfloor 20 = 20! = 20\,.\,19\,.\,18\,.\,...\,3\,.\,2\,.\,1$

En general:

$\lfloor n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3)...\,3\,.\,2\,.\,1.\ ;\ n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$

NÚMERO COMBINATORIO

El número de combinaciones formadas se denomina número combinatorio, se representa por: C_k^n

Fórmula:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-k\ \lfloor k}$$

Donde: $n, k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k \leq n$

Ejemplos:

- $C_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!\ 5!} = \frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7.6.5!}{2.1.5!} = 21$
- $C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!\,2!} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

Propiedades de los números combinatorios

I. Suma de combinatorios

$C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$; Ejemplo: $C_{10}^{100} + C_{11}^{100} = C_{11}^{101}$

II. Propiedad complementaria

$C_k^n = C_{n-k}^n$; Ejemplo: $C_2^9 = C_{9-2}^9 = C_7^9$

III. Degradación de índices

Ambos índices: $C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$ $\quad$ Ejemplo: $C_5^{20} = \frac{20}{5} C_{5-1}^{20-1} = 4C_4^{19}$

Índice superior: $C_k^n = \frac{n}{n-k} C_k^{n-1}$ $\quad$ Ejemplo: $C_5^{20} = \frac{20}{20-5} C_5^{20-1} = \frac{4}{3} C_5^{19}$

Índice inferior: $C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$ $\quad$ Ejemplo: $C_5^{20} = \frac{20-5+1}{5} C_{5-1}^{20} = \frac{16}{5} C_4^{20}$

IV. Igualdad de números combinatorios

Si: $C_p^m = C_q^n \Rightarrow$ $m = n \wedge p = q$ $\vee$ $m = n \wedge p + q = n$

Ejemplo:

$C_{2x-5}^{12} = C_{x-1}^{12} \Rightarrow 2x - 5 = x - 1 \vee (2x-5) + (x-1) = 12$

$\Rightarrow x = 4 \qquad \Rightarrow x = 5$

$\therefore CS = \{4;5\}$

BINOMIO DE NEWTON (Desarrollo del binomio con exponente natural, $n \in \mathbb{N}$)

Esta fórmula atribuida incorrectamente a Newton nos permite obtener el desarrollo de $(x+a)^n$, siendo $n \in \mathbb{N}$.

Fórmula general: $(x+a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + C_3^n x^{n-3}a^3 + ... + C_n^n a^n$

Ejemplo:

$(x+a)^5 = C_0^5 x^5 + C_1^5 x^4 a + C_2^5 x^3 a^2 + C_3^5 x^2 a^3 + C_4^5 x a^4 + C_5^5 a^5$

$= x^5 + 5x^4 a + \frac{5.4}{2.1} x^3 a^2 + \frac{5.4.3}{3.2.1} x^2 a^3 + \frac{5.4.3.2}{4.3.2.1} x a^4 + a^5 \quad = x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5xa^4 + a^5$

Observación

1. El factorial está definido sólo para los números naturales ($\mathbb{N}$).
   Asi:
   $\lfloor -100$; $\lfloor \frac{2}{3}$; $\lfloor 2-\sqrt{2}$; $\lfloor \pi$
   No existen
2. El factorial se puede expresar en función de sus consecutivos posteriores a él.
   $\lfloor 19 = 19.18.17.\lfloor 16$
   También se puede aplicar en forma contraria:
   $31.30.29.28.\lfloor 27 = \lfloor 31$
3. Por convención: $\lfloor 0 = 1$
   Por definición : $\lfloor 1 = 1$
   Es erróneo indicar:
   $\lfloor 0 = \lfloor 1 \Rightarrow 0 = 1$ (absurdo)
4. De lo anterior se concluye:
   Si: $\lfloor a = 1$
   $\Rightarrow a = 0 \vee a = 1$
5. Si: $\lfloor x = \lfloor y$; $\forall x, y \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow x = y$
6. Resultados importantes:
   1. $C_0^n = 1; n \in \mathbb{N}$
   2. $C_n^n = 1; n \in \mathbb{N}$
   3. $C_1^n = n; n \in \mathbb{N} - \{1\}$



Nota

a) Si: $n \in \mathbb{Z}^+$: $\binom{n}{k} = C_k^n$

b) En general, la suma de coeficientes (ΣCoef.) del desarrollo del binomio $(\gamma x + \varepsilon a)^m$ es:

$\Sigma coef. = (\gamma + \varepsilon)^m$

c) La suma de exponentes del desarrollo de $(x^\gamma + a^\varepsilon)^p$ (Σexp) estará dado por:

$\Sigma exp. = (\gamma + \varepsilon)\frac{p(p+1)}{2}$

Observaciones

1. El número de términos del desarrollo del binomio $(x+a)^n$ es,

$\boxed{\text{n.° términos} = n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

2. La suma de coeficientes de $(x+a)^n$ es:

$\boxed{\Sigma\text{coef.} = 2^n}$

Y del binomio $(x-a)^n$

$\boxed{\Sigma\text{coef.} = 0}$

3. Si el binomio $(x \times a)^n$ es homogéneo, el desarrollo será homogéneo del mismo grado.

4. Si los coeficientes del binomio son iguales, los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

5. $(x+a)^n$ = +,+,+,+ ....+
$(x-a)^n$ +,−,+,−,+,− .....
Los de lugar par son negativos.
Los de lugar impar son positivos.



Observaciones

a) Cuando el exponente (n) del binomio es natural, se obtiene un número limitado de términos, sin embargo, si es negativo y/o fraccionario se obtienen infinitos términos.

b) $\binom{n}{0} = 1$, $n \in \mathbb{R}$

c) Si se tiene $(x \pm a)^m$, $m \notin N$ se recomienda expresarlo de la siguiente manera:

$x^m\left(1 \pm \frac{a}{x}\right)^m$ donde : $-1 < \frac{a}{x} < 1$

d) De tener:
$(1 \pm x)^r$ y "x" es un valor pequeñísimo, se cumple:

$\boxed{(1 \pm x)^r \approx 1 \pm rx}$

Cálculo del término general

Fórmula del término general: $\boxed{t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} a^k}$. Donde: k+1 es el lugar pedido y "n" el exponente del binomio.

Ejemplo:
Halla el término de lugar 35 en el desarrollo de $(x^3 - y^2)^{50}$

Resolución:
$t_{35} = t_{34+1} = C_{34}^{50}(x^3)^{50-4}(y^2)^{34} = +\ C_{34}^{50}\ x^{48}y^{68}$
↑ lugar impar

Posición del término central

I. n.° par ⇒ Existe 1 término central

$$t_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

II. n: impar ⇒ Existen 2 términos centrales

$$t_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \wedge t_{\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}$$

Otras definiciones y fórmulas

III. Coeficiente binómico

Se representa por: $\binom{n}{k}$; $n \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{Z}^+$

Se lee: coeficiente binómico de n sobre k.

Siendo su desarrollo:

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}^{\text{k factores}}}{\underbrace{1.2.3\ldots k}_{\text{k factores}}}$$

Ejemplo: $\binom{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}-3)}{1.2.3.4} = \dfrac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}-3)}{24}$

II. Para un polinomio elevado a un exponente natural

Ejemplo:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k)^n;\ n \in \mathbb{N}$$

Se cumple:

$$\text{n.° de términos} = C_n^{n+k-1} = C_{k-1}^{n+k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!}$$

$$\text{Coeficiente de } a_1^{\alpha} a_2^{\beta} a_3^{\gamma} \ldots a_k^{\phi} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots\phi!}$$

BINOMIO DE NEWTON (Desarrollo del binomio con exponente negativo y/o fraccionario)

Fórmula general: $(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \ldots\infty$ términos

Donde: **n** negativo y/o fraccionario (exponente del binomio).

El término general se calcula con: $\boxed{t_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}a^k}$

Destacar que cuando $n < 0$ y fraccionario se usa el coeficiente binómico: $\binom{n}{k}$

También:

$$t_{k+1} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}^{\text{k factores}}}{k!}x^{n-k}a^k$$

Ejemplo:
Desarrolla hasta el tercer término: $(1-x)^{-\frac{1}{3}}$

Resolución:

$$(1-x)^{-\frac{1}{3}} = \left(1+(-x)\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \binom{-\frac{1}{3}}{0} + \binom{-\frac{1}{3}}{1}(-x) + \binom{-\frac{1}{3}}{2}(-x)^2 = 1 - \frac{1}{3}(-x) + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}x^2 = 1 + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2 + \ldots$$

Problemas resueltos

1 Calcula el coeficiente del término que admite a xyz en:

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}+3\sqrt[3]{y}-\frac{1}{3}\sqrt[4]{z}\right)^9$$

Resolución:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+3\sqrt[3]{y}-\frac{\sqrt[4]{z}}{3}\right)^9$$

$$t_{k+1}=C^n_k\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+3\sqrt[3]{y}\right)^{n-k}\left(-\frac{\sqrt[4]{z}}{3}\right)^k$$

$$t_{k+1}=C^n_kC^{n-k}_p\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-k-p}(3\sqrt[3]{y})^p\left(-\frac{\sqrt[4]{z}}{3}\right)^k$$

$$t_{k+1}=C^n_kC^{n-k}_p\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-p}x^{\frac{n-k-p}{2}}.3^p.y^{\frac{p}{3}}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\left(z^{\frac{k}{4}}\right) \qquad ...(1)$$

Como:

$$t_{k+1}=C^n_kC^{n-k}_p\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-p}3^p.(-3)^{-k}xyz \qquad ...(2)$$

Identificamos exponentes de (1) y (2):

$n-k-p=2 \wedge p=3 \wedge k=4 \Rightarrow n=9$

Reemplazamos en (2):

$$t_5=\underbrace{C^9_4C^5_3(2)^{-2}\,3^3\,(-3)^{-4}}_{105\ \longleftarrow\ \text{coeficiente}}xyz$$

$\therefore$ El coeficiente es 105

2 Calcula x en:

$$\frac{(C^{n+1}_{x+1}-C^n_x)C^{n-1}_{x-1}}{(C^n_x)^2-\frac{n+1}{x+1}\cdot C^n_xC^{n-1}_{x-1}}=2x-8$$

Resolución:

Degradamos a C^{n+1}_{x+1} tenemos:

$$\frac{\left(\frac{n+1}{x+1}C^n_x-C^n_x\right)\cdot C^{n-1}_{x-1}}{(C^n_x)^2-\frac{n+1}{x+1}\cdot C^n_x\cdot C^{n-1}_{x-1}}=2x-8$$

$$\frac{C^n_x\left(\frac{n+1}{x+1}-1\right)\cdot C^{n-1}_{x-1}}{C^n_x\left(C^n_x-\frac{n+1}{x+1}\cdot C^{n-1}_{x-1}\right)}=2x-8$$

$$\frac{\left(\frac{n-x}{x+1}\right)C^{n-1}_{x-1}}{C^n_x-\frac{n+1}{x+1}\cdot C^{n-1}_{x-1}}=2x-8$$

$$\frac{\left(\frac{n-x}{x+1}\right)C^{n-1}_{x-1}}{\frac{n}{x}C^{n-1}_{x-1}-\frac{n+1}{x+1}\cdot C^{n-1}_{x-1}}=2x-8$$

$$\frac{\left(\frac{n-x}{x+1}\right)C^{n-1}_{x-1}}{C^{n-1}_{x-1}\left(\frac{n}{x}-\frac{n+1}{x+1}\right)}=2x-8 \Rightarrow \frac{\frac{n-x}{x+1}}{\frac{n}{x}-\frac{n+1}{x+1}}=2x-8$$

$\Rightarrow x=2x-8$

$\therefore x=8$

3 Si el número de términos que se obtiene al desarrollar la potencia: $(2+3x^2+4y^3+5z^4)^n$ es 84. Halla: n

Resolución:

Sea: $(a_1+a_2+a_3+...+a_k)^n \Rightarrow$ n.° términos $=C^{n+k-1}_{k-1}$

En el problema: $k=4$

Por lo tanto: $C^{n+4-1}_{4-1}=84 \Rightarrow C^{n+3}_3=84$

Desarrollamos:

$$C^{n+3}_3=\frac{(n+3)!}{(n+3-3)!3!}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3}=84$$

Dando forma: $(n+3)(n+2)(n+1)=9.8.7$

$\therefore n=6$

4 Determina el valor de **n** si se sabe que el término central del desarrollo de $P(x)=(x+1)^n$ es: $6x^{\frac{n^2-9n+24}{2}}$

Resolución:

$P(x)=(x+1)^n$

$t_{central}=t_{\frac{n}{2}+1}=C^n_{\frac{n}{2}}\,x^{n-\frac{n}{2}} \qquad ...(I)$

Dato:

$t_{central}=6x^{\frac{n^2-9n+24}{2}} \qquad ...(II)$

De (I) $\wedge$ (II):

$$\frac{n^2-9n+24}{2}=\frac{n}{2}$$

$n^2-10n+24=0$

n $\quad -6$

n $\quad -4$ $\Big\}$ $n=6 \vee n=4$

Además:

$C^n_{\frac{n}{2}}=6$

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|\tfrac{n}{2}}\ \underline{|\tfrac{n}{2}}}=6$$

(*)Si: $n=4 \Rightarrow \dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}\ \underline{|2}}=6$

(*) Si: $n=6 \Rightarrow \dfrac{\underline{|6}}{\underline{|3}\ \underline{|3}}=20\neq 6$

$\therefore n=4$

5 Se define: $n^k!!=2^kn!$; n!: factorial de n.

Halla r si:

$2!!+4!!+8!!+16!!+...+2^r!!=2048$

Resolución:

$2!!+4!!+8!!+...+2^r!!=2048$

Sabemos que $n^k!!=2^kn!$

$2^1!!+2^2!!+2^3!!+...+2^r!!=2048$

Por definición:

$2.2!+2^2.2!+2^3.2!+...+2^r.2!=2048$

$(2^1+2^2+2^3+...+2^r).2=2048$

$2^1+2^2+2^3+...+2^r=1024$

$$\underbrace{2^1+2^2+2^3+...+2^r}_{2(2^r-1)\,=\,1024}=1024$$

$\Rightarrow 2^r=512$

$\therefore r=9$

RADICACIÓN - RACIONALIZACIÓN

Recuerda

Los radicales se clasifican en:

- **Radicales homogéneos:** Aquellos que tienen igual índice:
  $\sqrt[11]{3x}; \sqrt[11]{7y}; \sqrt[11]{9}; \sqrt[11]{x^7}$
- **Radicales semejantes:** Aquellos que además de tener el mismo índice, poseen la misma cantidad subradical:
  $\sqrt[7]{A^2};\ \frac{1}{7}\sqrt[7]{A^2};\ -2\sqrt[7]{A^2}$

En las operaciones con radicales procedemos así:

- **Introducir factores en una raíz.** El exponente del factor a introducir es multiplicado por el índice del radical.
  $$A^B\sqrt[C]{D} = \sqrt[C]{A^{BC}D}$$
- **Extraer factores de un raíz.** Esto se aplica cuando el factor a extraer tiene exponente mayor o igual al índice del radical.
  $$\sqrt[A]{B^{AC}D} = \sqrt[A]{(B^C)^A D} = B^C\sqrt[A]{D}$$
- **Homogenización de radicales:** Se determina el mínimo común múltiplo (MCM) de todos los índices y se aplica: $\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[np]{A^{mp}}$
  Veamos:
  Homogeniza:
  $\sqrt[6]{a^5}; \sqrt[3]{x^2}; \sqrt[4]{y^3}$
  MCM (6, 3, 4) = 12
  ⇒ aplicamos el principio:
  $\sqrt[6.2]{A^{5.2}}; \sqrt[3.4]{x^{2.4}}; \sqrt[4.3]{y^{3.3}}$
  $\underbrace{\sqrt[12]{A^{10}}; \sqrt[12]{x^8}; \sqrt[12]{y^9}}$
  Radicales homogéneos



RADICACIÓN

Es la operación que consiste en hallar una cantidad algebraica llamada raíz, que al ser elevada a un cierto índice reproduce una cantidad dada llamada radicando o cantidad subradical.

Elementos de una raíz

$$\sqrt[A]{B} = C$$

Donde:
A : índice ($A \in \mathbb{N}$)
$\sqrt{\ }$: signo radical
B: cantidad surbrdical o radicando
C: raíz

Transformación a radicales simples

Radicales de la forma: $\sqrt{x \pm y}$

$$\sqrt{x \pm \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} \pm \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{9 - \sqrt{72}} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{9^2 - 72}}{2}} - \sqrt{\frac{9 - \sqrt{9^2 - 72}}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{9+3}{2}} - \sqrt{\frac{9-3}{2}}$$
$$\sqrt{9 - \sqrt{72}} = \sqrt{6} - \sqrt{3}$$

Regla práctica:

$$\sqrt{(x + y) \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{11 - \sqrt{72}} = \sqrt{11 - 2\sqrt{9.2}}$$
$$= \sqrt{(9 + 2) - 2\sqrt{9.2}}$$
$$= \sqrt{9} - \sqrt{2}$$
$$\sqrt{11 - \sqrt{72}} = 3 - \sqrt{2}$$

RACIONALIZACIÓN

Es un procedimiento que consiste en transformar uno de los componentes de una fracción (numerador o denominador) que está en forma irracional en otra equivalente paralelamente racional.

Factor racionalizante (FR)

Es la expresión irracional que multiplicada por el denominador irracional lo convierte en una expresión racional.

$$(\text{Expresión irracional})(\text{FR}) = \text{Expresión racional}$$

Casos de racionalización

Para denominadores de la forma:

$\sqrt[A]{B^C}$; $\{A; C\} \in \mathbb{N}$ y $A > C$, B: n.° primo ⇒ $(\sqrt[A]{B^C})(\text{FR}) = A$; donde $\text{FR} = \sqrt[A]{B^{A-C}}$

Ejemplo:

$$\frac{7}{\sqrt[7]{7^3}} = \frac{7}{\sqrt[7]{7^3}}\left(\frac{\sqrt[7]{7^{7-3}}}{\sqrt[7]{7^{7-3}}}\right) = \frac{7\sqrt[7]{7^4}}{7} = \sqrt[7]{7^4}$$

Para denominadores de la forma:

$\sqrt[2P]{T} \pm \sqrt[2P]{R}$; $P \in \mathbb{N}$ y $\{T, R\} \in \mathbb{Q}^+$ ⇒ $(\sqrt[2P]{T} \pm \sqrt[2P]{R})(\text{FR}) = \sqrt[P]{T} - \sqrt[P]{R}$; donde $\text{FR} = \sqrt[2P]{T} \mp \sqrt[2P]{R}$

Ejemplos:

1. $$\frac{5}{\sqrt{11} - \sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{11} - \sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{\sqrt{11} + \sqrt{3}}\right) = \frac{5(\sqrt{11} + \sqrt{3})}{11 - 3} = \frac{5}{8}(\sqrt{11} + \sqrt{3})$$



2. Racionaliza: $A = \dfrac{\sqrt{6-\sqrt{35}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}}{\sqrt{5+\sqrt{21}}}$

Dando forma:

$$A = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}}}+\sqrt{4-2\sqrt{\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}}}{\sqrt{5+2\sqrt{\frac{7}{2}\times\frac{3}{2}}}}$$

$$A = \frac{\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}} \Rightarrow A = \frac{\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

Racionalizamos:

$$A = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\times\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{4} = \frac{10-2\sqrt{21}}{4} \Rightarrow A = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

Para denominadores de la forma:

$\boxed{\sqrt[3]{M}\pm\sqrt[3]{N}}$; $\{M; N\}\in\mathbb{Q}^+ \Rightarrow \boxed{(\sqrt[3]{M}\pm\sqrt[3]{N})(FR) = M\pm N}$, donde: $FR = \sqrt[3]{M}^2 \mp \sqrt[3]{M}\sqrt[3]{N} + \sqrt[3]{N}^2$

Ejemplo:

$$\frac{10}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}} = \underbrace{\frac{10}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}\left(\frac{\sqrt[3]{7}^2+\sqrt[3]{7}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2}{\sqrt[3]{7}^2+\sqrt[3]{7}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2}\right)}_{\text{Diferencia de cubos}} = \frac{10\overbrace{(\sqrt[3]{7}^2+\sqrt[3]{7}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}^2)}^{FR}}{\sqrt[3]{7}^3-\sqrt[3]{2}^3} = 2FR$$

Casos especiales

I. $\forall n\in\mathbb{Z}^+;\ n\geq 2$ $\quad \boxed{(\sqrt[n]{M}-\sqrt[n]{P})FR = M-P \Rightarrow FR = \sqrt[n]{M}^{\,n-1}+\sqrt[n]{M}^{\,n-2}\sqrt[n]{P}+\ldots+\sqrt[n]{P}^{\,n-1}}$

II. $\forall n\in\mathbb{Z}^+$; n impar $\quad \boxed{(\sqrt[n]{M}+\sqrt[n]{P})FR = M+P \Rightarrow FR = \sqrt[n]{M}^{\,n-1}-\sqrt[n]{M}^{\,n-2}\sqrt[n]{P}+\ldots+\sqrt[n]{P}^{\,n-1}}$

III. $\forall n\in\mathbb{Z}^+$; n par $\quad \boxed{(\sqrt[n]{M}+\sqrt[n]{P})FR = M-P \Rightarrow FR = \sqrt[n]{M}^{\,n-1}-\sqrt[n]{M}^{\,n-2}\sqrt[n]{P}+\ldots-\sqrt[n]{P}^{\,n-1}}$

Recuerda

- **Diferencia de cuadrados:**

  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

  En forma análoga:

  $(\sqrt[2P]{A}\pm\sqrt[2P]{B})(\sqrt[2P]{A}\mp\sqrt[2P]{B}) = \sqrt[P]{A}-\sqrt[P]{B}$

- **Suma y diferencia de cubos**

  $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2) = a^3\pm b^3$

  Analogamente:

  $(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a}^2\mp\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}) = a\pm b$



EFECTUAR

Grupo I

Transforma de radicales dobles a simples:

1. $N = \sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{8-\sqrt{48}}$
2. $N = \sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{5}$
3. $N = \sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{3}$
4. $Q = \sqrt{13+\sqrt{88}}-\sqrt{11}$
5. $N = \sqrt{3+\sqrt{8}}-1$

Grupo II

1. Racionaliza e indica el denominador:

   $E = \dfrac{4}{\sqrt[7]{648}}$

2. Racionaliza:

   $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

3. Reduce: $N = \dfrac{7}{2\sqrt{2}-1}-2\sqrt{2}+2$

4. Reduce: $M = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

1 Simplifica:

$N = \dfrac{3}{\sqrt[10]{8}} - \dfrac{3\sqrt[10]{128}}{2} + \sqrt{6}$

Resolución:

$N = \dfrac{3}{\sqrt[10]{2^3}} \cdot \underbrace{\dfrac{\sqrt[10]{2^{10-3}}}{\sqrt[10]{2^{10-3}}}}_{(FR)} - \dfrac{3}{2}\sqrt[10]{2^7} + \sqrt{6}$

$N = \dfrac{3\sqrt[10]{2^7}}{\sqrt[10]{2^3 \,.\, 2^7}} - \dfrac{3}{2}\sqrt[10]{2^7} + \sqrt{6}$

$N = \dfrac{3}{2}\sqrt[10]{2^7} - \dfrac{3}{2}\sqrt[10]{2^7} + \sqrt{6}$

$\therefore N = \sqrt{6}$

2 Simplifica:

$C = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Resolución:

Racionalizamos cada término:

$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{1}{(\sqrt{2}+1)} \cdot \dfrac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{2}{(\sqrt{3}-1)} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

Reemplazamos cada término en la expresión:

$C = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$C = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore C = 2\sqrt{2}$

3 Simplifica la expresión:

$E = \dfrac{\sqrt{21+4\sqrt{27}}}{2\sqrt{3}+3}$

Resolución:

Transformando a radicales dobles:

$\sqrt{21+\sqrt{4^2 \,.\, 27}} = \sqrt{21+\sqrt{432}}$

$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{A-C}{2}}$

Donde: $C = \sqrt{A^2 - B}$

$\Rightarrow C = \sqrt{21^2 - 432} = \sqrt{9} = 3$

Luego: $\sqrt{21+\sqrt{432}} = \sqrt{\dfrac{21+3}{2}} + \sqrt{\dfrac{21-3}{2}}$

Reemplazamos:

$E = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3} = 1$

$\therefore E = 1$

4 Simplifica:

$M = \sqrt{2x+1+2\sqrt{x^2+x}} - \sqrt{x+1}$

Resolución:

$M = \sqrt{\underbrace{2x+1}_{a+b} + 2\sqrt{\underbrace{x^2+x}_{a.b}}} - \sqrt{x+1}$

Entonces, los números son:

$a = x \quad \wedge \quad b = x+1$

Cumplen que:

$a + b = x + x + 1 = 2x + 1$

$a \,.\, b = x(x+1) = x^2 + x$

Reemplazamos:

$M = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}$

$\therefore M = \sqrt{x}$

5 Racionaliza:

$F = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{36} + 2\sqrt[3]{2}}$

Resolución:

$F = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3^4} + \sqrt[3]{3^2 . 2^2} + \sqrt[3]{2^4}}$

Racionalizamos:

$F = \dfrac{1.(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{3^4} + \sqrt[3]{3^2.2^2} + \sqrt[3]{2^4})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2})}$

$\therefore F = \dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{9})^3 - (\sqrt[3]{4})^3} = \dfrac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}{5}$

6 Calcula x de:

$\sqrt[x-1]{\sqrt{2}+1} \; \sqrt[x+1]{\sqrt{2}-1} = \left[\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right]^{0,25}; \; (x > 0)$

Resolución:

$\sqrt[x-1]{\sqrt{2}+1} \;\; \sqrt[x+1]{\sqrt{2}-1} = \left[\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right]^{0,25}$

$\sqrt[x-1]{\sqrt{2}+1} \; \dfrac{\overbrace{\sqrt[x+1]{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[x+1]{\sqrt{2}+1}}^{1}}{\sqrt[x+1]{\sqrt{2}+1}} = (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{4}}$

$\dfrac{\sqrt[x-1]{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[x+1]{\sqrt{2}+1}} = \sqrt[4]{\sqrt{2}+1}$

$(\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}} = (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{4}}$

Igualamos exponentes:

$\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{4}$

$8 = x^2 - 1$

$\therefore x = 3$

NÚMEROS COMPLEJOS



CONCEPTO

Se llama número complejo a todo par ordenado (a; b) de componentes reales. El conjunto de los números complejos es denotado por $\mathbb{C}$.

Notación:

$$z = (a; b) = a + bi; \{a; b\} \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}$$

Al número **a** se le llama parte real de z: $a = \text{Re}(z)$
Al número **b** se le llama parte imaginaria de z: $b = \text{Im}(z)$

COMPLEJOS ESPECIALES

A) Complejos conjugados

Complejo: $z = -a - bi$
Conjugado: $\overline{z} = -a + bi$

Ejemplos:
- $r = 3 - 5i \Rightarrow \overline{R} = 3 + 5i$
- $s = \frac{1}{2} + 2i \Rightarrow \overline{S} = \frac{1}{2} - 2i$

B) Complejos opuestos

Complejo: $z = -a + bi$
Opuesto: $z^* = a - bi$

Ejemplos:
- $h = 5 - \sqrt{3}\,i \Rightarrow h^* = -5 + \sqrt{3}\,i$
- $c = \frac{1}{2} + 3i \Rightarrow c^* = -\frac{1}{2} - 3i$

Propiedades de los conjugados

Considerando los complejos: z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$

1. $z_1 = \overline{z}_1 \iff \overline{z}_1$ es complejo real

   Ejemplos:
   - $z_1 = 3 + 0i = 3 \Rightarrow \overline{z}_1 = 3 \Rightarrow z_1 = \overline{z}_1$
   - $z_1 = -2 \Rightarrow \overline{z}_1 = -2 \Rightarrow z_1 = \overline{z}_1$

2. $\overline{z}_2 = z_2^* \iff z_2$ es imaginario puro

   Ejemplo:
   - $z_2 = 3i \Rightarrow \overline{z}_2 = -3i \wedge z_2^* = -3i$
     $\Rightarrow \overline{z}_2 = z_2^*$

3. $z_1 + \overline{z}_1 = 2\text{Re}(z_1)$

   Ejemplo:
   - $\left.\begin{array}{l} z_1 = 10 + 7i \\ \overline{z}_1 = 10 - 7i \end{array}\right\}$ $z_1 + \overline{z}_1 = 2(10)$
     $\Rightarrow z_1 + \overline{z}_1 = 2\text{Re}(z_1)$

4. $z_2 - \overline{z}_2 = 2i\,\text{Im}(z_2)$

   Ejemplo:
   - $\left.\begin{array}{l} z_2 = 11 - 3i \\ \overline{z}_2 = 11 + 3i \end{array}\right\}$ $z_2 - \overline{z}_2 = -2(3i) = 2i(-3)$
     $z_2 - \overline{z}_2 = 2i\,\text{Im}(z_2)$

5. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$

   Ejemplo:
   - $\overline{(2-3i)+(7-5i)} = \overline{9-8i} = 9 + 8i$
     $\overline{(2-3i)+(7-5i)} = \overline{2-3i} + \overline{7-5i}$
     $= 2 + 3i + 7 + 5i = 9 + 8i$

6. $\overline{z_1 \,.\, z_2} = \overline{z}_1 \,.\, \overline{z}_2$

   Ejemplo:
   - $\overline{(2+3i)(7-i)} = \overline{(2+3i)}\,.\,\overline{(7-i)} = (2-3i)(7+i)$
     $= 17 - 19i$

7. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2};\ \forall\, z_2 \neq (0;0)$

   Ejemplos:
   - $\overline{\left(\dfrac{3-2i}{1+3i}\right)} = \overline{\dfrac{3\times1+(-2)(3)}{1^2+3^2} + \dfrac{(-2)1-3\times3}{1^2+3^2}i}$
     $= \overline{\dfrac{1}{10}(-3-11i)} = \dfrac{1}{10}(-3+11i)$
   - $\overline{\left(\dfrac{3-2i}{1+3i}\right)} = \dfrac{\overline{3-2i}}{\overline{1+3i}} = \dfrac{3+2i}{1-3i}$
     $= \dfrac{3\times1+2(-3)}{1^2+3^2} + \dfrac{2\times1-3(-3)}{1^2+3^2}i$
     $= \dfrac{1}{10}(-3+11i)$

8. $\overline{\overline{z}}_1 = z_1$

   Ejemplos:
   - $\overline{\overline{10-3i}} = \overline{10+3i} = 10 - 3i$
   - $\overline{\overline{\sqrt{10}-2i}} = \overline{\sqrt{10}+2i} = \sqrt{10} - 2i$

9. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n;\ \forall n \in \mathbb{N}$

10. $\overline{(\sqrt[n]{z})} = \sqrt[n]{\overline{z}};\ \forall n \in \mathbb{N}$

11. $|\text{Re}(z)| \leq |z|;\ |\text{Im}(z)| \leq |z|$

Atención

- La unidad imaginaria se define como la raíz cuadrada del negativo de la unidad:

  $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

- La cantidad imaginaria es aquella que resulta de extraer la raíz par a un número real negativo:

  $\sqrt[2n]{a} =$ Imaginario
  $a < 0 \wedge n \in \mathbb{Z}$



Recuerda

Propiedades:

1. $i^{\pm\overset{\circ}{4}} = 1$
2. $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$
3. $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$
   $\forall n \in \mathbb{Z}$
4. $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{4n} = 0$
   $\forall n \in \mathbb{Z}$
5. $(1+i)^2 = 2i \quad (1-i)^2 = -2i$
6. $(1+i)^4 = (1-i)^4 = -4$
7. $\dfrac{1+i}{1-i} = i \quad \dfrac{1-i}{1+i} = -i$

Teoremas:

1. $i^{-k} = (-1)^k i^k;\ k \in \mathbb{Z}^+$
2. $(\overset{\circ}{4} + r)^a = \overset{\circ}{4} + r^a;\ a \in \mathbb{N}$
   $r \in \mathbb{Z}$
3. $2^a = \overset{\circ}{4};\ a \geq 2;\ a \in \mathbb{N}$

Observaciones

La forma cartesiana:
$z = a + bi$ se denominará:

- Complejo real, o puramente real si: $b = 0$
- Complejo imaginario puro si: $a = 0$
- Complejo nulo si: $a = 0 \wedge b = 0$
- Complejos iguales Si: $a + bi = c + di \Rightarrow a = c \wedge b = d$



Recuerda

Las operaciones matemáticas con los números complejos: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

- **Adición:**

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

- **Sustracción:**

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

- **Multiplicación:**

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- **División:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

$z_2 \neq (0; 0)$

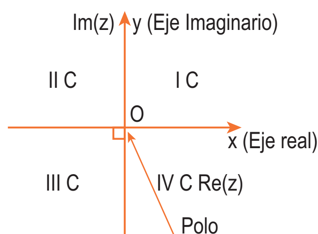
Nota

El afijo de un complejo es un punto del plano complejo, el cual se representa por un par ordenado (a; b).

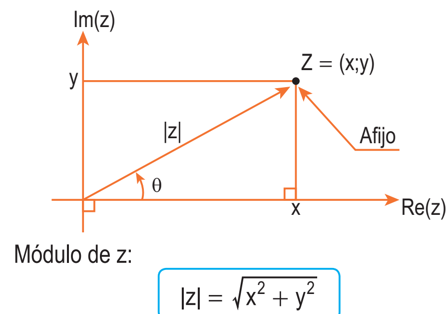
n.° complejo	Afijo del n.° complejo
$A = 10 - 3i$	$(10; -3)$
$J = -7 - 2i$	$(-7; -2)$
$z = \sqrt{5} - i$	$(\sqrt{5}; -1)$
$B = \frac{1}{2} + \frac{3}{7}i$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{7}\right)$
$Q = 1 + 10i$	$(1; 10)$

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Plano complejo = Diagrama de Argand = Plano de Gauss



$z = (x; y) = x + yi \,/\, x; y \in \mathbb{R}; \; i = \sqrt{-1}$



Módulo de z:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

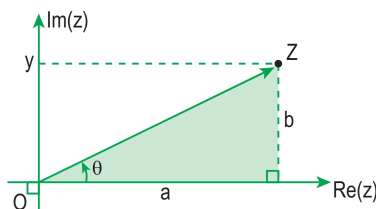
Ejemplos:

- $z = -3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5$
- $z = 5i \Rightarrow |z| = |5|$

Propiedades: $\forall z; z_1; z_2 \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{Z}^+$

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0$; $z = (0; 0)$
2. $|z| = |\bar{z}| = |z^*|$
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$; $z_2 \neq 0$
5. $|z^n| = |z|^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
6. $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$
7. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Desigualdad triangular)
9. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$
10. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
11. $|Re(z)| \leq |z|$
12. $|Im(z)| \leq |z|$

ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO (Z)



$$arg(z) = 2k\pi + \theta$$; $k = 0; 1; 2; 3 \ldots$

- Si: $k = 0 \Rightarrow arg(z) = \theta$; se denomina: argumento principal de z.

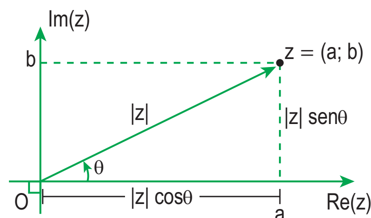
$$0 \leq \theta < 2\pi$$

θ se puede expresar en radianes o grados sexagesimales.

- De la región triangular sombreada:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO



Del gráfico: $z = (a; b) = a + bi = |z|\cos\theta + (|z|\operatorname{sen}\theta)i = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$

Luego: $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$; donde: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\theta = arg(z)$



Operaciones en forma polar

Sean los complejos:

$$z = |z|\text{cis}\theta;\ z_1 = |z_1|\text{cis}\theta_1;\ z_2 = |z_2|\text{cis}\theta_2 \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}$$

A) Multiplicación

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

B) División

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2) \ ;\ z_2 \neq (0;0)$$

C) Potenciación (fórmula de Moivre)

$$z^n = (|z|\text{cis}\theta)^n = |z|^n\text{cis}(n\theta)$$

D) Radicación

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|\text{cis}\theta} = \sqrt[n]{|z|}\ \text{cis}\left(\frac{2k\pi + \theta}{n}\right)$$

Donde: $k = 0; 1; 2; 3; ...; (n-1)$

Nota

A la forma polar también se le puede representar en su forma sintética:

$$z = |z|\text{cis}(\theta) = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$$

RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD REAL

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = \begin{cases} z_0 = 1 \\ z_1 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = w \\ z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = w^2 \end{cases}$$

Propiedades:

1. $w^{3k} = 1;\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$
2. $w^{3k+m} = w^m,\ \forall\ k;m \in \mathbb{Z}^+$
3. $1 \times w \times w^2 = 1$
4. Las tres raíces cúbicas de la unidad suman cero: $1 + w + w^2 = 0$

Recuerda

- El argumento "θ" es el ángulo generado por el radio vector al girar en sentido antihorario desde el eje real positivo hacia un punto cualquiera del radio vector.
- Para calcular el ángulo "θ" principal de un complejo se debe tener en cuenta en que cuadrante se encuentra el afijo de z y luego calculamos tomando en cuenta:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$



FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

El número complejo en su forma polar o trigonométrica: $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$

La fórmula de Euler es: $e^{\theta i} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$

Entonces el número complejo en su forma exponencial es:

$$z = |z|e^{\theta i}$$

Donde:

θ: argumento principal de z (arg(z)), expresado en radianes.

e: número de Neper ($e \approx 2{,}71828$ ...)

$|z|$: módulo de z

i: unidad imaginaria $\left(i = \sqrt{-1}\right)$

Ejemplos:

- $z = 141(\cos 20° + i\text{sen}20°) = 141e^{\frac{\pi i}{9}}$
- $z = -5 + 5\sqrt{3}\,i = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2}\left[\cos\left((90° + 30°)\frac{\pi}{180°}\right) + i\ \text{sen}\left((90° + 30°)\frac{\pi}{180°}\right)\right]$

$$z = 10\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\ \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 10e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

Observaciones

- Relación entre la forma exponencial y la forma polar de un número complejo.

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$$
$$e^{-\theta i} = \cos\theta - i\text{sen}\theta$$

- Teoremas adicionales

I. Si: $\text{cis}(\theta_1) = \text{cis}(\theta_2)$
$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$
$\forall k \in \mathbb{Z}$

II. Si: $e^{\theta_1 i} = e^{\theta_2 i}$
$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$
$\forall k \in \mathbb{Z}$

EFECTUAR

1. Reduce: $A = (1+i)^8 + (1-i)^8$
2. Reduce: $A = i + i^1 + i^3 + i^4 + ... + i^{20} + i^{21}$
3. Calcula: $A = \dfrac{\sqrt{-27} + \sqrt{-75} - \sqrt{-147}}{\sqrt{-12} - \sqrt{-48} + \sqrt{-108}}$
4. Calcula: $A = \dfrac{(1+i)^{17}}{(1+i^7)^{13}}$
5. Resuelve: $M = (\sqrt{-1} + 2)(\sqrt{-1} + 1) - \sqrt{-9}$
6. Resuelve: $N = (2\sqrt{-1} + 3)(3\sqrt{-1} - 2) - \sqrt{-25}$
7. Dividir: $\dfrac{-1 + 5i}{2 + 3i}$
8. Dividir: $\dfrac{(1-i)^{10}}{(1+i)^8}$

Problemas resueltos

1 Calcula:

$$N = \frac{(1+i)^2 + (-i)^3}{(1-i)^2}$$

Resolución:

$$N = \frac{2i - i^3}{-2i} = \frac{2i + i}{-2i} = \frac{3i}{-2i}$$

$$N = -\frac{3}{2}$$

2 Calcula:

$$K = \frac{(1-i)^3(1+i)^3}{8}$$

Resolución:

$$K = \frac{(1-i)^2(1-i)(1+i)^2(1+i)}{8}$$

$$K = \frac{-2i(1-i^2)2i}{8}$$

$$K = \frac{-8i^2}{8} = 1$$

3 Reduce:

$$\frac{(1+i)^4 + (1-i)^4}{(1+i)^2 - (1-i)^2}$$

Resolución:

$$\frac{(1+i)^4 + (1-i)^4}{(1+i)^2 - (1-i)^2}$$

Recuerda:

$(1+i)^4 = (1-i)^4 = -4$

$(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^2 = -2i$

Reemplazando tenemos:

$$\frac{-4-4}{2i-(-2i)} = \frac{-8}{4i} = \frac{-2i}{i \times i} = \frac{-2i}{-1} = 2i$$

4 Efectúa:

$$E = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-4i}$$

Resolución:

Del enunciado:

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{-4i}$$

$$\Rightarrow E = \left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{-4i} = e^{-\pi i^2} = e^{-\pi(-1)}$$

$$\therefore E = e^{\pi}$$

5 Determina 2a – b si se cumple:

$$a + bi = [(2-3i)^{i+1}]^{1-i^{33^{34}}}$$

Resolución:

$$a + bi = [(2-3i)^{i+1}]^{1-i^{33^{34}}}$$

Observación:

$$i^{33^{34}} = i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{34}} = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$$

Luego:

$a + bi = [(2-3i)^{1+i}]^{1-i}$

$a + bi = (2-3i)^{1^2 - i^2}$

$a + bi = (2-3i)^2 = -5 - 12i$

$\Rightarrow a = -5$ y $b = -12$

Nos piden:

$2a - b = 2(-5) - (-12) = 2$

6 Sean z_1, z_2 dos complejos que cumplen:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 - z_1|^2 = 4|z_1|^2$$

Halla: $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; si $\text{Re}(z_1) = 2$

Resolución:

$$\underbrace{|z_1 + z_2|^2 + |z_2 - z_1|^2}_{} = 4|z_1|^2$$

$2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 4|z_1|^2$

$|z_2|^2 = |z_1|^2 \Rightarrow |z_2| = |z_1|$

$$\therefore \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$$

7 Si se cumple lo siguiente:

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $|z_1| = |z_2| = 3$ con $\text{Arg}(z_1) = \beta$;

$\text{Arg}(z_2) = \alpha$, donde: $\beta - \alpha = \pi$

Halla: $|z_2 + iz_1|^2 + |z_1 + iz_2|^2$

Resolución:

$|z|^2 = z \times \bar{z}$; $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

Nos piden:

$S = |z_2 + iz_1|^2 + |z_1 + iz_2|^2$

Por partes:

$$\begin{aligned} |z_2 + iz_1|^2 &= (z_2 + iz_1)\overline{(z_2 + iz_1)} \\ &= (z_2 + iz_1)(\overline{z_2} + \overline{iz_1}) \\ &= (z_2 + iz_1)(\overline{z_2} - i\overline{z_1}) \\ &= z_2\overline{z_2} - i\overline{z_1}z_2 + iz_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} \end{aligned}$$

$|z_2 + iz_1|^2 = |z_2|^2 - i\overline{z_1}z_2 + iz_1\overline{z_2} + |z_1|^2$ ...(I)

En forma análoga:

$|z_1 + iz_2|^2 = |z_1|^2 - iz_1\overline{z_2} + iz_2\overline{z_1} + |z_2|^2$ ...(II)

Sumando (I) y (II):

$|z_2 + iz_1|^2 + |z_1 + iz_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 2(3^2 + 3^2) = 36$





ECUACIONES DE PRIMER GRADO PLANTEO DE ECUACIONES

ECUACIÓN ALGEBRAICA

Es una igualdad condicional, en la que al menos debe existir una letra denominada incógnita.

Ejemplo:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1=0$$

Es una ecuación de incógnita x.

CLASES DE ECUACIONES

De acuerdo a sus características se presentan:

Por el tipo de coeficientes

En este caso pueden ser numéricas o literales.

Ejemplos:

- $x-\frac{x}{6}-\frac{x}{12}-\frac{x}{7}=9$: es una ecuación numérica
- $ax+\frac{b(c+1)}{2}=d^2$: es una ecuación literal con coeficientes a; b; c y d

Por el tipo de soluciones

a) Compatible

Aquella cuyo conjunto solución tiene al menos un elemento.
Se presentan también como:

Compatible determinada

Es aquella en donde se pueden cuantificar sus soluciones o raíces. En este capítulo, como un caso particular, la ecuación de primer grado tendrá únicamente una solución.

Ejemplo:

$\frac{2x-8}{5}+7=19 \Rightarrow \frac{2x-8}{5}=12 \Rightarrow x=34$

Compatible indeterminada

Es aquella en donde no es posible cuantificar sus soluciones o raíces.

Ejemplo:

$3(x-2)+9=24+3(x-7) \Rightarrow 3=3$

Esta ecuación verifica para todo x, su CS = ∞ (infinito).

b) Incompatible (inconsistente)

También denominada ecuación absurda, no admite en su conjunto solución elemento alguno.

Ejemplo:

$\frac{7x}{4}+\frac{21}{x-200}=350+\frac{2}{x-200} \Rightarrow x=200$

Pero tenga en cuenta que si reemplazamos el valor de x en la ecuación inicial, resulta matemáticamente absurda. No hay valor alguno de x que verifique tal ecuación. CS = $\varnothing$; también CS = { }

Recuerda

- **Solución o raíz de una ecuación**
  Es el valor o valores de la incógnita que reemplazados en la ecuación verifican la igualdad.
  Así:
  $\frac{6x}{5}-1=17$
  $\Rightarrow x=15$ (solución o raíz)
- **Conjunto solución de una ecuación (CS)**
  Es el conjunto formado por todas las soluciones de una cierta ecuación.
  Así:
  $(3x-1)(x-2)(x+10)=0$
  $x=\frac{1}{3}$ ó $x=2$ ó $x=-10$
  $\Rightarrow CS=\left\{-10; \frac{1}{3}; 2\right\}$



Nota

A las ecuaciones también se les llama enunciados abiertos y es evidente que el valor de verdad de la igualdad (verdadero o falso) dependerá únicamente de los valores que puedan adoptar sus incógnitas.

Por la forma cómo se presentan

a) Fraccionarias

Ecuación que contiene fracciones algebraicas, es decir, donde la variable aparece en los denominadores de las fracciones (al menos en uno de ellos).

Ejemplo:

$$\frac{101}{x-1}+\frac{3x-1}{x+1}=\frac{3(x-2)}{2x-1}+25x-\frac{1}{x}$$

b) Irracionales

Cuando su variable se encuentra dentro de un radical.

Ejemplos:

- $\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+1}=1$
- $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{2x+3x}=10$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Forma general:

$$ax+b=0$$

Donde:
x: incógnita (asume un valor)
a; b $\in \mathbb{R}$ (constantes)

Solución o raíz de la ecuación: $x=-\frac{b}{a}$

Análisis de la ecuación: $ax+b=0$

a) Si: $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, la ecuación es: compatible determinada y su solución: $x=-\frac{b}{a}$ es única.

b) Si: $a=0 \wedge b \neq 0$, la ecuación es: incompatible o absurda, no tiene solución: $x \in \varnothing$; $x \in \{\ \}$

c) Si: $a \neq 0 \wedge b=0$, la ecuación es: determinada, su raiz es nula: $x=0$ es única.

d) Si: $a=0 \wedge b=0$, la ecuación es: compatible indeterminada, verifica para todo valor que puede tomar la variable x.

Ejemplos:

1. Determina los valores de a y b, si la ecuación: $(a-9)x+b=3$ es indeterminada.

Resolución:

- La ecuación se puede escribir como: $(a-9)x+(b-3)=0$
- Para que sea indeterminada: $a-9=0 \Rightarrow a=9$

  $b-3=0 \Rightarrow b=3$

2 Siendo a; b $\in \mathbb{R}-\{0\}$, determina la raíz de la ecuación:

$$a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx$$

Resolución:

- Efectuamos las operaciones en el primer miembro de la ecuación: $a^2x-a^3+b^2x-b^3=abx$
- Transponemos términos: $a^2x+b^2x-abx=a^3+b^3$
- Factorizamos la variable y desarrollamos el binomio al cubo: $x(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
- Simplificamos el factor a^2-ab+b^2: $x=a+b$

$\therefore$ La ecuación es COMPATIBLE DETERMINADA cuya única solución es: $x=a+b$

Observación

I. Si de los dos miembros de una ecuación se simplifican o dividen factores que contengan a la incógnita, entonces se perderán soluciones.
Para evitar esto, la expresión simplificada se iguala a cero.

Así:

$(2x+1)(10x-1)=7(10x-1)$
Si simplificamos $10x-1$ se tiene $2x+1=7 \Rightarrow x=3$; para no perder una solución $10x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{10}$

II. Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por una expresión que contiene a la incógnita, se pueden introducir soluciones extrañas.
Para evitar esto, la expresión que se multiplica se hace diferente de cero.

Así:

$\frac{x+2}{x-2}=\frac{7}{x-2}$
Multiplicando ambos miembros por $x-2$ se tiene $x+2=7 \Rightarrow x=5$; para evitar que se introduzcan soluciones extrañas: $x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

III. Si a ambos miembros de una ecuación se elevan a un mismo exponente, se pueden introducir soluciones extrañas.
Para evitar esto, las soluciones encontradas deben comprobarse en la ecuación original y tomar como soluciones correctas a aquellas que se verifiquen.

Así:

$\sqrt{x^2+7}=x+7$
Elevando al cuadrado:
$x^2+7=x^2+14x+49$
$\Rightarrow x=-3$
Comprobando en la ec. original:
$4=4 \Rightarrow x=-3$
(única solución)





3. Determina la solución de: $\sqrt{x+14} - \sqrt{x-1} = 1$

   Resolución:

   - Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{x+14}\right)^2 = \left(1+\sqrt{x-1}\right)^2$$
$$x + 14 = 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1$$
$$2\sqrt{x-1} = 14$$
$$x - 1 = 49$$
$$x = 50$$

   - Comprobando si verifica en la ecuación original:

$$\sqrt{50+14} - \sqrt{50-1} = 1$$
$$8 - 7 = 1$$
$$1 = 1 \text{ (verdadera)}$$

∴ La ecuación es COMPATIBLE DETERMINADA donde la única solución es $x = 50$.

Atención

Para lo sucesivo nos centraremos solo en el estudio de las ecuaciones compatibles determinadas de primer grado de la forma:

$ax + b = 0 \ ; \ a \neq 0$



PLANTEO DE ECUACIONES

Trabajo

En este caso se tiene que determinar el tiempo que demandará en realizar un trabajo hecho por varias personas tomando en cuenta su capacidad de producción.

Ejemplos:

1. Rubén puede pintar una pared en 3 h; ¿qué parte de la pared podrá pintar en 1 h?

   Resolución:

   Pared } 3 h ⇒ [$\frac{1}{3}$ |] } 3 h ⇒ En 1 h Rubén puede pintar $\frac{1}{3}$ de la pared.

   (1 h bajo $\frac{1}{3}$)

2. Sandra puede construir un biorreactor en 6 días. ¿Qué parte podrá construir en 1 día, en 2 días, en 5 días, y en x días?

   Resolución:

   Siguiendo el criterio del ejemplo anterior:

   En 1 día Sandra construye: $\frac{1}{6}$ del biorreactor.

   En 2 días Sandra construye: $2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$ del biorreactor.

   En 5 días Sandra construye: $5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$ del biorreactor.

   En x días Sandra construye: $x\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{x}{6}$ del biorreactor.

3. Un albañil puede hacer una escalera de concreto en 6 días. Su ayudante lo puede hacer solo en 8 días. Determina el tiempo que demorarán si trabajan juntos.

   Resolución:

	Parte del trabajo hecho en 1 día	Número de días trabajando juntos	Parte completada del trabajo
Albañil	$\frac{1}{6}$	t	$\frac{t}{6}$
Ayudante	$\frac{1}{8}$	t	$\frac{t}{8}$

   Luego:

   Parte que hizo el albañil en "t" días + Parte que hizo su ayudante en "t" días = Total del trabajo

$$\frac{t}{6} + \frac{t}{8} = 1$$

   - Multiplicamos miembro a miembro por el MCM(6; 8) = 24

$$4t + 3t = 24$$
$$7t = 24$$
$$t = 3\tfrac{3}{7} \text{ días} <> 3 \text{ días } 10 \text{ h } 17 \text{ min}$$

   ∴ Trabajando juntos, la escalera de concreto la terminarían en 3 días 10 h 17 min.

Nota

Mayor que; más que, excede	Una cantidad tiene más que otra

Así:
Un número excede a otro en 25
A – B = 25

A = B + 25

Menor que; menos que excedido	Una cantidad tiene menos que otra

Así:
Un número es excedido por otro en 9
A = B – 9

B = A + 9
A = B – 9

Nota

Los problemas con datos numéricos son aquellos en donde el cálculo de la variable permite tomar en consideración valores o constantes reales que nos dan como datos.

Atención

Enunciado	Lenguaje matemático
como; por	cociente entre dos cantidades

Así:

El 20 por 101 de un número es 200

$20 \div 101 \; . \; N = 200$

$\frac{20}{101} . N = 200$



Datos numéricos

Ejemplos:

1. Un vendedor lleva una caja de vasos de vidrio al mercado y pensaba venderlos a S/.1,6 cada uno. En el trayecto se le rompieron 13, y calculó que vendiendo los que le quedaban a S/.1,8, cada uno sacaría el mismo capital. Determina la cantidad de vasos de vidrio que llevaba.

   Resolución:

   Asumimos a la variable V como el número de vasos de vidrio que llevaba.
   - Su capital al venderlos a S/.1,6 sería:
     1,6 V ...(1)
   - Como se le rompieron 13, entonces quedan (V – 13) vasos de vidrio, luego para que no disminuya su capital los vende a S/.1,8 cada vaso, siendo en este caso ahora su capital:
     1,8(V – 13) ...(2)
   - Igualando (1) y (2):
     $1,6V = 1,8(V - 13) \Rightarrow 8V = 9(V - 13)$
     $\Rightarrow V = 117$

   ∴ Inicialmente en la caja llevaba 117 vasos de vidrio.

2. Un comerciante compra manzanas a 7 por 24 soles y las vende a 3 por 11 soles. Determina las manzanas que debe vender para ganar 120 soles.

   Resolución:

   - El comerciante compra 7 manzanas por 24 soles, luego el precio de compra de cada manzana es $\frac{24}{7}$ soles.
   - Asimismo las vende a 3 manzanas por 11 soles, entonces el precio de venta de cada manzana es $\frac{11}{3}$ soles.
   - Se cumple:
     Ganancia de cada manzana = Precio de venta – Precio de compra

     $\text{Ganancia de c/manzana} = \frac{11}{3} - \frac{24}{7} = \frac{5}{21}$ soles

   ∴ Ahora, si por cada manzana gana $\frac{5}{21}$ soles, para ganar 120 soles debe vender:

   $120 . \left(\frac{21}{5}\right) = 504$ manzanas.

EFECTUAR

Grupo I

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

1. $5x + 3 = 9x - 12 + x$
2. $3x - 3 + x = 6 - 8x - 12$
3. $\frac{x}{6} + 5 = \frac{1}{3} - x$
4. $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{5x}{6} = 15$
5. $5(x - 1) + 16(2x + 3) = 3(2x - 7) - x$
6. $7(2x - 5) - (4x - 11) = 9(x - 6) + 29$
7. $(x + 3)(x - 5) = (x + 2)(x + 5)$
8. $3a - [2a - 2(a - 3)] = 2(a - 2)$

Grupo II

1. Resuelve: $3(2x - 5) - 2(x - 4) = 4(x - 4)$
2. Resuelve: $3(x - 2) - 4(x + 3) = 5 - x$
3. Resuelve: $5(x - 1) - 4(x - 2) = 3(x - 3) - 2(x - 4) + 4$
4. Resuelve: $3(2x - 4) + 2(3x - 2) = 2(6x - 8)$
5. Halla m + n, si: $m(x - 2) = 4 - nx$ es compatible indeterminada.
6. Halla a, si: $a(x - 2) = 3(x + 2) + 4(x - 3)$
7. Halla m, si: $m(x + 2) = 3(x - 8)$ es incompatible.
8. Halla a, si: $3ax + 2 + 5x = 8(x - 2)$ es inconsistente.

Problemas resueltos

1 Resuelve:

$$\frac{1}{ax+n+1}=\frac{1}{(ax+1)(ax+2)}+\frac{1}{(ax+2)(ax+3)}+\frac{1}{(ax+3)(ax+4)}+\dots+\frac{1}{(ax+n)(ax+n+1)}$$

Resolución:

$$\frac{1}{ax+n+1}=\left(\frac{1}{ax+1}-\frac{1}{ax+2}\right)+\left(\frac{1}{ax+2}-\frac{1}{ax+3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{ax+n}-\frac{1}{ax+n+1}\right)$$

Se observa que se eliminan algunos términos, luego:

$$\frac{1}{ax+n+1}=\frac{1}{ax+1}-\frac{1}{ax+n+1}$$

$$\frac{2}{ax+n+1}=\frac{1}{ax+1}\Rightarrow 2ax+2=ax+n+1$$

$$ax=n-1$$

$$\therefore x=\frac{n-1}{a}$$

2 ¿Qué valor debe tomar λ para que la siguiente ecuación sea incompatible? $\frac{\lambda}{m}(x-\lambda)=\frac{m}{\lambda}(x-m);\lambda\neq m$

Resolución:

Del problema tenemos:

$$\lambda^2(x-\lambda)=m^2(x-m)\Rightarrow\lambda^2x-\lambda^3=m^2x-m^3$$

$$\Rightarrow x=\frac{\lambda^2+\lambda m+m^2}{\lambda+m}$$

Para que la ecuación sea incompatible, x no debe existir.

Para $\lambda=-m\Rightarrow\ x=\frac{\lambda^2}{0}\Rightarrow\nexists\ x$

$\therefore\ \ \lambda=-m$

3 Halla la solución de la ecuación:

$$\frac{x+a}{x+1}=\frac{3x}{ax+1}$$

Si esta se reduce a una ecuación lineal.

Resolución:

$$(x+a)(ax+1)=3x(x+1)$$

$$ax^2+x+a^2x+a=3x^2+3x$$

$$(a-3)x^2+(a^2+1-3)x+a=0$$

Como es de primer grado:

$a-3=0\ \Rightarrow\ a=3$

Reemplazamos:

$(3^2-2)x+3=0$

$7x=-3$

$x=-\frac{3}{7}$

$\therefore$ CS = {–3/7}

4 Halla el valor de x si la siguiente ecuación es de primer grado.

$$\frac{3px-3}{x-1}+\frac{3px-2}{x+1}=2p+1$$

Resolución:

$$\frac{3px^2+(3p-3)x-3+3px^2-(3p+2)x+2}{x^2-1}=2p+1$$

$$6px^2-5x-1=(2p+1)x^2-2p-1$$

$$(4p-1)x^2-5x=-2p \qquad \dots(1)$$

$$4p-1=0$$

$$4p=1\ \Rightarrow\ p=\frac{1}{4}$$

Reemplazamos $p=\frac{1}{4}$ en (1):

$-5x=-2\left(\frac{1}{4}\right)$

$5x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{10}$

$\therefore$ CS = {1/10}

5 Halla n para que la siguiente ecuación se reduzca a una de primer grado.

$$\frac{2nx-3}{x-1}+\frac{3nx-2}{x+1}=2n+3$$

Resolución:

Operamos la ecuación:

$(2nx-3)(x+1)+(3nx-2)(x-1)=(2n+3)(x^2-1)$

Reducimos:

$$5nx^2-nx-5x-2=(2n+3)x^2-2n-3$$

$(5n-2n-3)x^2-(n+5)x=-2n-1$

Del enunciado:

$5n-2n=3$

$3n=3$

$\therefore n=1$

6 Resuelve:

$$3x+(-5+x)=2x-(-2x-3)$$

Resolución:

$3x-5+x=2x+2x+3$

$4x-5=4x+3$

$0x=8$

$x=\frac{8}{0}$

La ecuación es incompatible.

$\therefore$ CS = $\varnothing$

7 Resuelve:

$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}-2=0$

Resolución:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}-2=0$$
$$\left(\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}\right)^2=(2)^2$$
$$1+\sqrt{2+\sqrt{x}}=4$$
$$\left(\sqrt{2+\sqrt{x}}\right)^2=(3)^2$$
$$2+\sqrt{x}=9$$
$$(\sqrt{x})^2=(7)^2$$
$$x=49$$

$\therefore$ CS = {49}

8 Determina la raíz de:

$$3(2x+1)+5=8$$

Resolución:

$$3(2x+1)+5=8$$
$$6x+8=8$$
$$6x=0$$
$$x=0$$

$\Rightarrow$ Es una ecuación compatible determinada.
$\therefore$ CS = {0}

9 Si compro 10 plumones y 20 lapiceros, gasto S/.70. Sabiendo que el precio de cada plumón excede en un sol al de un lapicero, ¿cuánto cuesta un plumón?

Resolución:

Planteamos:

	1 plumón	1 lapicero
Precio:	$x+1$	x

Gasto total:

$$10(x+1)+20(x)=70$$
$$10x+10+20x=70$$
$$30x+10=70$$
$$30x=60$$
$$x=2$$

$\therefore$ Un plumón cuesta S/.3.

10 Ambas, Angélica y Rosmery pueden preparar una cena con pavo al horno en 6 h. Sola, a Rosmery le tomaría 8 h. ¿Cuánto tiempo le tomaría a Angélica?

Resolución:

Sea t el tiempo que le tomaría sola a Angélica en preparar la cena:

	Parte hecha en 1 hora	Número de horas trabando juntas	Parte completada del trabajo
Angélica	1/t	6	6/t
Rosmery	1/8	6	6/8

Parte que hizo Angelica + Parte que hizo Rosmery = Trabajo conjunto

$$\frac{6}{t}+\frac{6}{8}=1$$
$$6\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{8}\right)=1$$
$$\frac{8+t}{8t}=\frac{1}{6}$$
$$t=24\text{ h}$$

Luego, a Angélica le tomaría 24 h para preparar una cena con pavo al horno.

11 Halla "x" en:

$$\frac{x-a}{x-a-1}-\frac{x-a-1}{x-a-2}=\frac{x-b}{x-b-1}-\frac{x-b-1}{x-b-2}$$

donde a, b $\in \mathbb{R}$ y $a \neq b$.

Resolución:

En la ecuación:

$$\frac{x-a}{x-a-1}-\frac{x-a-1}{x-a-2}=\frac{x-b}{a-b-1}-\frac{x-b-1}{x-b-2} \quad ...(\alpha)$$

Hacemos: $\begin{cases} x-a-2=m \\ x-b-2=n \end{cases}$

En la ecuación, nos quedaría:

$$\frac{m+2}{m+1}-\frac{m+1}{m}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}$$

Efectuando:

$$\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$
$$m^2+m=n^2+n$$
$$m^2-n^2+m-n=0$$

Factorizando:

$$(m+n)(m-n)+m-n=0$$
$$(m-n)(m+n+1)=0$$

Luego:

$\underbrace{m-n=0}$ $\vee$ $m+n+1=0$

Descartamos (por dato: $a \neq b$)

$\Rightarrow m+n+1=0$

Reemplazando en (α):

$$x-a-2+x-b-2+1=0$$
$$2x-a-b-3=0$$
$$x=\frac{a+b+3}{2}$$



MATRIZ

Se define una matriz como un arreglo rectangular de elementos ordenados en filas y columnas.

Una matriz tiene la siguiente forma general:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 2 \\ \\ \rightarrow i \\ \\ \rightarrow m \end{matrix} \Bigg\} \text{Filas}$$

$m \times n$

Columnas: $\downarrow 1 \quad \downarrow 2 \quad \downarrow 3 \quad \downarrow j \quad \downarrow n$

> **Nota**
>
> La notación abreviada de una matriz es:
>
> $A = (a_{ij})_{m \times n}$
>
> A: matriz de orden $m \times n$
> m: número de filas
> n: número de columnas
> a_{ij}: elemento de la matriz A ubicada en la fila i, columna j.

OPERACIONES CON MATRICES

Adición

Dadas las matrices de igual orden: $A = (a_{ij})_{m \times n} \wedge B = (b_{ij})_{m \times n}$
Se define:

$$A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

Ejemplo:

Determina la matriz M + N; a partir de: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} \wedge N = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$M + N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-2) & (-1+2) & (5+4) \\ (3-3) & (8-7) & (-2+9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicación

a) Multiplicación de un escalar por una matriz

Sean: $A = (a_{ij})_{m \times n} \wedge k \in \mathbb{R}$, se define: $kA = k(a_{ij})_{m \times n} = (ka_{ij})_{m \times n}$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 8A = \begin{pmatrix} 8.5 & 8.3 \\ 8.(-2) & 8.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 24 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna

Sean las matrices:

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n})_{1 \times n} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

Se cumple: $AB = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \ldots + a_{1n}b_{n1})_{1 \times 1}$

Ejemplo:

$$(1\ 3\ 2)_{1 \times 3} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = (1(4) + 3(-2) + 2(5))_{1 \times 1} = (4 - 6 + 10)_{1 \times 1} = (8)_{1 \times 1}$$

> **Recuerda**
>
> **IGUALDAD DE MATRICES**
>
> Dadas las matrices:
> $A = (a_{ij})_{m \times n} \wedge B = (b_{ij})_{m \times n}$
>
> $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i; j$
>
> **MATRICES ESPECIALES**
>
> **1. Matriz columna**
> Aquella que tiene una sola columna, es de orden: $n \times 1$
> Ejemplo:
> $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$
>
> **2. Matriz fila**
> Aquella que tiene una sola fila, es de orden: $1 \times n$
> Ejemplo:
> $B = (10\ \ -5\ \ 2\ \ 3)_{1 \times 4}$
>
> **3. Matriz cuadrada**
> Es aquella cuyo número de filas es igual al número de columnas.
> Se denota:
> $A = (a_{ij})_{n \times n}\ ;\ A = (a_{ij})_n$
> Ejemplo:
> $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$
>
> **4. Matriz nula**
> Todos sus elementos son ceros.
> $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$



Recuerda

TEOREMAS
Sean A, B y C matrices para las cuales están definidas las operaciones de adición y multiplicación, además el escalar $m \in \mathbb{R}$.

1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $ABC = (AB)C = A(BC)$
4. $m(A + B) = mA + mB$
5. $AB = \mathbb{0}$, no implica que $A = \mathbb{0} \vee B = \mathbb{0}$
6. $AB = AC$, no implica que $B = C$
7. AB no necesariamente es igual a BA.
8. Si: $A = B$ $\Rightarrow AC = BC \vee CA = CB$

DEFINICIONES
I. Si: $AB = BA$ A y B son matrices conmutativas

II. Si: $AB = -BA$ A y B son matrices anticonmutativas



Observación

Del ejemplo:

- $4\cos^4\theta + \text{sen}^2 2\theta$
 $= 4\cos^4\theta + (2\text{sen}\theta\cos\theta)^2$
 $= 4\cos^4\theta + 4\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$
 $= 4\cos^2\theta\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{1}$
 $= 4\cos^2\theta$
- $2\text{sen}2\theta\cos^2\theta + 2\text{sen}2\theta\text{sen}^2\theta$
 $= 2\text{sen}2\theta\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{1} = 2\text{sen}2\theta$
- $\text{sen}^2 2\theta + 4\text{sen}^4\theta$
 $= (2\text{sen}\theta\cos\theta)^2 + 4\text{sen}^4\theta$
 $= 4\text{sen}^2\theta\cos^2\theta + 4\text{sen}^4\theta$
 $= 4\text{sen}^2\theta(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)$
 $= 4\text{sen}^2\theta$

c) Multiplicación de matrices

Sean las matrices: $A = (a_{ij})_{m \times n}$; $B = (b_{ij})_{n \times p}$

Entonces se define: $AB = (a_{ij})_{m \times n}(b_{ij})_{n \times p} = (c_{ij})_{m \times p}$ (n = n: Iguales)

Donde: c_{ij} resulta de multiplicar la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B.

Ejemplo:

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} \wedge B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

Iguales

$\Rightarrow$ AB es posible

Entonces: $C = A\,.\,B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

$$C = \begin{pmatrix} (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} & (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & (3\ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (-1\ \ 4)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} & (-1\ \ 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & (-1\ \ 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 3(4) + 2(-1) & 3(3) + 2(2) & 3(1) + 2(2) \\ (-1)4 + 4(-1) & (-1)3 + 4(2) & (-1)1 + 4(2) \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 10 & 13 & 7 \\ -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Multiplicación para una matriz cuadrada A

$A^2 = AA$ $\quad A^3 = A^2A = AA^2$ $\quad A^4 = A^3A = AA^3$ $\quad A^n = AA^{n-1} = A^{n-1}A$

Ejemplos:

1. Examen de admisión UNI 2001-II (matemática)

Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta & \text{sen}2\theta \\ \text{sen}2\theta & 2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$

Entonces la matriz M^3 es igual a:

Resolución:

- Determinamos M^2:

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta & \text{sen}2\theta \\ \text{sen}2\theta & 2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos^2\theta & \text{sen}2\theta \\ \text{sen}2\theta & 2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} (2\cos^2\theta\ \ \text{sen}2\theta)\begin{pmatrix} 2\cos^2\theta \\ \text{sen}2\theta \end{pmatrix} & (2\cos^2\theta\ \ \text{sen}2\theta)\begin{pmatrix} \text{sen}2\theta \\ 2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \\ (\text{sen}2\theta\ \ 2\text{sen}^2\theta)\begin{pmatrix} 2\cos^2\theta \\ \text{sen}2\theta \end{pmatrix} & (\text{sen}2\theta\ \ 2\text{sen}^2\theta)\begin{pmatrix} \text{sen}2\theta \\ 2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- Desarrollando cada elemento se tiene:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4\cos^4\theta + \text{sen}^2 2\theta & 2\text{sen}2\theta\cos^2\theta + 2\text{sen}^2\theta\text{sen}2\theta \\ 2\text{sen}2\theta\cos^2\theta + 2\text{sen}^2\theta\text{sen}2\theta & \text{sen}^2 2\theta + 4\text{sen}^4\theta \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 4\cos^2\theta & 2\text{sen}2\theta \\ 2\text{sen}2\theta & 4\text{sen}^2\theta \end{pmatrix} = 2\underbrace{\begin{pmatrix} 2\cos^2\theta & \text{sen}^2\theta \\ \text{sen}^2\theta & 2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}}_{M} = 2M$$

$M^2 = 2M$



- Luego, podemos deducir:

$$M^3 = M^2M = (2M)M = 2M^2$$
$$M^3 = 2(2M) = 4M$$

2. Examen de admisión UNI 2008-I (matemática)

Sean A y B matrices de orden 2×2. Determina si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si $A^2 = \mathbb{O} \Rightarrow A = \mathbb{O}$
II. Si $AB = \mathbb{O} \Rightarrow A = \mathbb{O} \vee B = \mathbb{O}$
III. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

Resolución:

I. Falsa (F)

- Asumimos la siguiente matriz para el análisis respectivo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; A \neq \mathbb{O}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Falsa (F)

- Igual que el caso anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{matrix} A \neq \mathbb{O} \\ B \neq \mathbb{O} \end{matrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow AB = \mathbb{O}$

III. Falsa (F)

- Aplicando la propiedad conmutativa:

$$(A + B)(A - B) = (A + B)A - (A + B)B = AA + BA - AB - BB$$
$$= A^2 + BA - AB - B^2$$

Casos particulares de una matriz cuadrada

1. Matriz triangular superior

Es aquella matriz, cuyos elementos que se encuentran debajo de la diagonal principal, son iguales a cero.

Es decir:

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz triangular superior, si: $a_{ij} = 0, \forall i > j$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Matriz triangular inferior

Es aquella matriz, cuyos elementos que se encuentran encima de la diagonal principal, son iguales a cero.

Es decir:

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz triangular inferior, si: $a_{ij} = 0; \forall i < j$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Matriz diagonal

Es aquella matriz, que simultáneamente es triangular superior e inferior, es decir, todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

Es decir:

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz diagonal si: $a_{ij} = 0; \forall i \neq j$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Matriz escalar

Es una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal principal son no nulos e iguales.

Es decir:

$A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz escalar

si: $a_{ij} = \begin{cases} k; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}; k \neq 0$

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Atención

No siempre se cumple:

$AB = BA$

De esta propiedad, para el caso del ejemplo 2(III) no es posible eliminar BA o AB.



Observación

- La transpuesta de una matriz A (de orden $m \times n$), es una matriz denotada por A^T (de orden $n \times m$) que se obtiene intercambiando las filas por las columnas de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- **Propiedades**
  Siendo A y B matrices y el escalar m.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(mA^T) = mA^T$
3. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
4. $(AB)^T = B^TA^T$

Nota

Si A es una matriz cuadrada, entonces la suma de los elementos de la diagonal principal se llama traza de A y se denota: Traz(A)

Propiedades:

- Traz(A + B) = Traz(A) + Traz(B)
- Traz(AB) = Traz(BA)
- Traz(kA) = kTraz(A); $k \in \mathbb{R}$



Recuerda

Dos matrices son OPUESTAS si son del mismo orden y además sus respectivos elementos son opuestos.
Veamos:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 6 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ su opuesto es: $-A$

$$-A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & -6 & 1\\ -1 & -4 & -1\end{pmatrix}$$

Nota

Determinante de orden dos:

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$$

$|A| = ad - bc$

Atención

También cabe señalar que hay otro método para la obtención del determinante de una matriz cuadrada.

MÉTODO DE LAPLACE
(Menores complementarios)

1. De acuerdo al orden de la matriz realizar el cuadro de signos.

Orden 2: $\begin{pmatrix}+ & -\\ - & +\end{pmatrix}$

Orden 3: $\begin{pmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{pmatrix}$

Orden 4: $\begin{pmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{pmatrix}$

2. Elegir convenientemente (el que tenga mayor cantidad de ceros una fila o columna llamada línea fija.

3 El determinante de la matriz estará dado por la suma de los productos de cada elemento de la línea fija multiplicado por el determinante que resulta de eliminar la fila y columna correspondientes al elemento.

5. Matriz unidad o identidad

Es una matriz escalar, cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad y se denota por I_n.

Es decir:

$$I_n=(a_{ij}) \mid a_{ij}=\begin{cases}1\ ;\ i=j\\ 0\ ;\ i\neq j\end{cases}$$

Ejemplos:

$$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ;\ I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

6. Matriz simétrica

Si una matriz cuadrada es igual a su transpuesta, se llama matriz simétrica.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 4\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 4\\ 2 & 4 & -5\end{pmatrix}$$

$$A=A^T$$

$\Rightarrow$ A es simétrica

DETERMINANTE

Se llama determinante, a un valor escalar que se le asocia a cada matriz cuadrada y se denota por:

$$|A|,\ D(A),\ Det(A)$$

Determinante de orden tres

Regla de Sarrus horizontal

1. Repetir la primera y segunda columna a continuación de la tercera respectiva.
2. Se toma el producto de los tres elementos de la diagonal principal y también el de sus dos paralelas siguientes, cada uno con signo positivo, y luego el producto de los tres elementos de la diagonal secundaria y el de sus paralelas siguientes, pero cada uno con signo negativo.
Veamos el esquema:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ejemplo: Examen de Admisión UNI 2004-II (matemática)

Halla el valor del determinante:

$$F=\begin{pmatrix}a^2 & a & 1\\ b^2 & b & 1\\ c^2 & c & 1\end{pmatrix}$$

Resolución:

- Aplicamos la regla de Sarrus horizontal:

$$|F|=\begin{vmatrix}a^2 & a & 1\\ b^2 & b & 1\\ c^2 & c & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a^2 & a & 1 & a^2 & a\\ b^2 & b & 1 & b^2 & b\\ c^2 & c & 1 & c^2 & c\end{vmatrix}$$

$$|F| = a^2b(1) + a(1)c^2 + (1)b^2c - c^2b(1) - c(1)a^2 - (1)b^2a$$
$$= a^2b + ac^2 + b^2c - bc^2 - a^2c - ab^2$$



- Agrupamos términos en forma conveniente:

$|F| = (a^2b - ab^2) + (ac^2 - bc^2) + (b^2c - a^2c) = ab(a - b) + c^2(a - b) + c(b^2 - a^2)$

$= ab(a - b) + c^2(a - b) - c(a^2 - b^2) = ab(a - b) + c^2(a - b) - c(a + b)(a - b)$

- Factorizamos: $(a - b)$

$|F| = (a - b)(ab + c^2 - c(a + b)) = (a - b)(ab + c^2 - ac - bc)$

$= (a - b)((ab - ac) + (c^2 - bc)) = (a - b)(a(b - c) + c(c - b))$

$= (a - b)(a(b - c) - c(b - c)) = (a - b)(b - c)(a - c)$

$\therefore\ |F| = (a - b)(b - c)(a - c)$

Propiedades de los determinantes

Dadas las matrices cuadradas A y B y el escalar $k \in \mathbb{R}$.

1. Si los elementos de una línea (fila o columna) son ceros, entonces su determinante es igual a cero.

   Ejemplos:

   - $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
   - $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$
   - $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 2 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$

2. Si B es la matriz que se obtiene a partir de A, luego de multiplicar a los elementos de una línea (fila o columna) por un escalar k ($k \neq 0$), entonces:

   $|B| = k|A|$

   Ejemplos:

   - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $k \neq 0$

   $\Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k|A| \quad \therefore\ |B| = k|A|$

   - $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 12 & 27 & -12 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 12 \\ 4 & 9 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3.4\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3. Si en una matriz se intercambian dos de sus líneas (fila o columna) paralelas cualesquiera, entonces el determinante de la matriz cambia de signo.

4. Si en una matriz a una fila o columna cualesquiera se le suma otra fila o columna multiplicada por un escalar, el determinante de la matriz no se altera.

5. Si dos líneas (filas o columnas) son proporcionales, el determinante será igual a cero.

   Ejemplo:

   $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -6 & 9 & -24 \\ 4 & -6 & 16 \end{vmatrix} = (-3)(2)\begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \\ 2 & -3 & 8 \end{vmatrix} = (-3)(2).0 = 0$

6. Si en una matriz, cada uno de los elementos de una cierta línea (fila o columna) viene expresado como la adición de dos o más términos, entonces el determinante se puede descomponer como la adición de dos o más determinantes.

   Ejemplo:

   $\begin{vmatrix} a & b & c \\ m+n+p & q+r+s & t+u+v \\ j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & q & t \\ j & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ n & r & u \\ j & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & s & v \\ j & k & l \end{vmatrix}$

Observación

- $|A^T| = |A|$
- $|AB| = |A||B|$
- $|kA| = k^n|A|$, A de orden n

Veamos:

$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$|kA| = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k^2\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{|A|}$

$\therefore\ |kA| = k^2$

A: matriz cuadrada de orden 2.



Observación

Se observa que los elementos de las filas 2 y 3 del ejemplo, son proporcionales, así:

$\frac{-6}{4} = \frac{9}{-6} = \frac{-24}{16}$

Luego, en el determinante de A, se sacó factor (–3) de la segunda fila y el factor 2 de la tercera fila respectivamente.



Recuerda

DETERMINANTE DE VANDERMONDE

1. De orden 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

2. De orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c - b)(c - a)(b - a)$$

3. De orden 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d - c)(d - b)(d - a)(c - b)(c - a)(b - a)$$

- Una matriz cuadrada A es no singular, si: $|A| \neq 0$
- Una matriz cuadrada A es singular si: $|A| = 0$

Atención

$|A + B| \neq |A| + |B|$



Observación

A y B son matrices cuadradas de orden 3, además $r \neq 0$.



7. El determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior y diagonal, se obtiene multiplicando todos los elementos de la diagonal principal.

Ejemplos:

- $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4)(1)(2) = -8$
- $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5^3 = 125$

Ejemplos:

1. Examen de admisión UNI 2012-I (mátemática)

Si:

$$\begin{vmatrix} c & 2c & c \\ 5b & a & 3b \\ b + 5c & b + d & b + 3c \end{vmatrix} = -4$$

Halla: $\begin{vmatrix} c & 0 & c \\ a & b & 0 \\ d & c & b \end{vmatrix}$ donde: $a; c; d \in \langle 0; +\infty\rangle$ y $b \in \langle -\infty; 0\rangle$

Resolución:

- Hacemos operaciones con las columnas (propiedad (4)):

$$\begin{vmatrix} c & 2c & c \\ 5b & a & 3b \\ b + 5c & b + d & b + 3c \end{vmatrix} \xrightarrow[c_2 + (-2)c_3]{c_1 + (-1)c_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 2b & a - 6b & 3b \\ 2c & d - b - 6c & b + 3c \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + (3)c_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 2b & a & 3b \\ 2c & d - b & b + 3c \end{vmatrix}$$

$$2\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ b & a & 3b \\ c & d - b & b + 3c \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ b & a & 3b \\ c & d - b & b + 3c \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ b & a & 3b \\ c & d - b & b + 3c \end{vmatrix} \xrightarrow{c_3 + (-3)c_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ b & a & 0 \\ c & d - b & b \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + (1)c_3} \begin{vmatrix} 0 & c & c \\ b & a & 0 \\ c & d & b \end{vmatrix} = -2$$

- Intercambiando columnas (c_2 con c_1), se obtiene:

$$-\begin{vmatrix} c & 0 & c \\ a & b & 0 \\ d & c & b \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow \text{nos piden: } \begin{vmatrix} c & 0 & c \\ a & b & 0 \\ d & c & b \end{vmatrix} = 2$$

2. Examen de admisión UNI 2008-II (matemática)

Si A y B son matrices 3×3 y $r \neq 0$ un número real, indica si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $|AB| = |A||B|$

II. $|A + B| = |A| + |B|$

III. $|rA| = r|A|$

Resolución:

Veamos cada proposición:

I. Verdadera (V)
$|AB| = |A||B|$; por teoría sabemos: $|AB| = |A||B|$

II. Falsa (F)
Lo establecido en la teoría es: $|A + B| \pm |A| + |B|$
Para $A = B = I$ (matriz identidad), si $|A + B| = |A| + |B|$, se tiene:
$|I + I| = |I| + |I| \Rightarrow |2I| = 2|I| \Rightarrow 2^3|I| = 2|I|$
$8 = 2$ (absurdo)

III. Falso (F)
De la teoría: $|rA| = r^3|A|$
Veamos sea $A = I$ (matriz identidad)
$\Rightarrow |rA| = r|A|$
$r^3|I| = r|I|$
$r^3 = r$ (absurdo, esto es posible si $r = 1$)

Problemas resueltos

X

1 Halla el valor de:

$$V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Sumamos a c_1 todas las demás columnas y factorizamos 2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Realizando las siguientes operaciones obtenemos:

$f_1 - f_2$; $f_2 - f_3$; $f_3 - f_4$

$$2\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$(-2)[2(2+2) + 1(-2+2) - 2(2+2)]$

$(-2)[8 + 0 - 8] = 0$

$\therefore V = 0$

2 Si B es una matriz escalar:

$$B = \begin{pmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \text{ halla a.b}$$

Resolución:

$$B = \begin{pmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ 0 & b-2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz escalar se cumple:

$a - 4 = 3 \Rightarrow a = 7$

$b - 2 = 3 \Rightarrow b = 5$

Piden:

$ab = (7)(5) = 35$

3 Encuentra la traza de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5/9 & 2 & -3 \\ 1 & 7/9 & 0 \\ -2 & 5 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} 5/9 & 2 & -3 \\ 1 & 7/9 & 0 \\ -2 & 5 & 8/3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{Traz}(A) = \frac{5}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{3} = 4$

4 Examen de admisión UNI 2003-I (matemática)

Halla el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{1000}$$

Resolución:

Buscando una regla de correspondencia para cada elemento de la matriz:

$$A^2 = A\,.\,A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} (1/3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^2 & 2/2^2 \\ 0 & 0 & (1/2)^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2\,.\,A = \begin{pmatrix} (1/3)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^2 & 2/2^2 \\ 0 & 0 & (1/2)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} (1/3)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^3 & 3/2^3 \\ 0 & 0 & (1/2)^3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\therefore A^{1000} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} & 1000/2^{1000} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} \end{pmatrix}$$

5 ¿Por qué matriz hay que premultiplicar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ para que resulte la matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$?

Resolución:

Sea $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la matriz buscada.

$\Rightarrow PA = B$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} a + 2b = 5;\ b = 2 \\ c + 2d = 6;\ d = 3 \end{cases}$ Luego: $a = 1$; $c = 0$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Nota

Se denomina SOLUCIÓN o CONJUNTO SOLUCIÓN a aquella colección de números que verifican en forma simultánea a todas las ecuaciones de dicho sistema.

Así, del sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x - \ \ y = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow CS = \{(5; -1)\}$

Pues: $5 + 3(-1) = 2$
$5 - (-1) = 6$

Nota

Otra representación matricial de un sistema lineal es mediante una MATRIZ AMPLIADA:

$$(A \vdots H) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & h_3 \end{array}\right)$$

Observación

De la ecuación matricial:

$A . X = H$

Al efectuar la multiplicación del primer miembro se obtiene una matriz que al igualarla con el segundo miembro se origina cada una de las ecuaciones del sistema lineal.



DEFINICIÓN

Es el conjunto de ecuaciones lineales con dos o más incógnitas, las cuales pueden verificarse para algunos valores asignados a sus incógnitas.

Ejemplo:
Son sistemas lineales:

$$\begin{cases} Mx + Ny = P \\ Mx - Ny = Q \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 9x - \ \ y = 11 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 6 \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 = 9 \end{cases}$$

Un sistema, con 3 ecuaciones lineales y 3 variables o incógnitas, se representa en forma general como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= h_3 \end{aligned}$$

Donde:

- $x_1; x_2; x_3$ son las variables o incógnitas del sistema
- $a_{ij}\ (\forall i = 1; 2; 3; ... \wedge \forall j = 1; 2; 3; ...)$ son los coeficientes
- $h_1; h_2; h_3$ son los términos independientes en cada ecuación.

REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA LINEAL, MEDIANTE LA NOTACIÓN MATRICIAL

El sistema anterior en forma MATRICIAL se representa como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} . \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}}_{H}$$

(Representación abreviada)

Donde:

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, se llama: matriz de los coeficientes.

$X = (x_1\ x_2\ x_3)^t$, se llama: matriz de las incógnitas.

$H = (h_1\ h_2\ h_3)^t$, se llama: matriz de los términos independientes.

Ejemplo:
Para el sistema:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 5x - y + 8z &= 6 \end{aligned}$$

Su representación será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ ó } (A \vdots H) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \end{array}\right)$$



Análisis de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

De la representación de un sistema lineal:

$$\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$$

Donde:
$a_2; b_2; c_2 \neq 0$

A) Sistema compatible determinado (solución única)
Cuando el número de ecuaciones independientes es igual al número de incógnitas.

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

B) Sistema compatible indeterminado (no tiene solución única, más de una solución, infinitas soluciones)
Cuando el número de ecuaciones independientes es menor que el número de incógnitas.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

C) Sistema incompatible (imposible, absurdo, inconsistente, no admite solución, no tiene solución, no tenga solución). Cuando el número de ecuaciones independientes es mayor que el número de incógnitas.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

CRITERIO PARA DAR SOLUCIÓN A UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Criterio de los determinantes (REGLA DE CRAMER)

De la representación lineal:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow CS = \{(m; n)\}$$

Valor de x (m) — Valor de y (n)

La solución del sistema por la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Teniendo en cuenta que: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

Donde:
Δx: determinante de x.
Δy: determinante de y.
Δs: determinante del sistema o determinante de la matriz de coeficientes.

Ejemplos:

1. Determina el conjunto solución del sistema: $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Resolución:
De acuerdo a lo establecido en la teoría:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{7(1) - 2(1)}{3(1) - 2(1)} = 5 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3(2) - 2(7)}{3(1) - 2(1)} = -8$$

$\therefore$ CS = {(5; –8)}

Atención

Ecuaciones independientes
Son aquellas en las que los coeficientes de las mismas incógnitas no son proporcionales entre sí.

- $x + 5y = 6$
  $x - 10y = -9$
  Son ecuaciones independientes, pues: $\frac{1}{1} \neq \frac{5}{-10}$
- $x + y = 9$
  $7x + 7y = 63$
  No son ecuaciones independientes, pues: $\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$



Recuerda

Criterios para resolver sistemas
Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 7 & ...(1) \\ 2x + y = 2 & ...(2) \end{cases}$$

I. Criterio de sustitución

De (1): $x = \frac{7-y}{3}$ ...(3)

Sustituyendo (3) en (2):

$2\left(\frac{7-y}{3}\right) + y = 2$
$\Rightarrow y = -8$ ...(4)

(4) en (3): $x = 5$

II. Criterio de igualación

De (1): $x = \frac{7-y}{3}$

De (2): $x = \frac{2-y}{2}$

Igualando: $\frac{7-y}{3} = \frac{2-y}{2}$

Luego: $y = -8$; $x = 5$

III. Criterio de reducción (eliminación)

(1) – (2): $x = 5$ (restando)
En (1): $y = -8$

Otro método de solución:
Usando la matriz ampliada y en ella empleando solamente transformaciones de fila.

Del sistema: $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Usando las ecuaciones		Usando la matriz ampliada	
(1) (2)	$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$		$\left(\begin{array}{cc:c} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \end{array}\right)$
(1) – (2) (2)	$\begin{cases} x = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$	$\xrightarrow{f_1 - f_2}$	$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$
(1) 2(1) – (2)	$\begin{cases} x = 5 \\ -y = 8 \end{cases}$	$\xrightarrow{2f_1 - f_2}$	$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{array}\right)$
(1) –(2)	$\begin{cases} x = 5 \\ y = -8 \end{cases}$	$\xrightarrow{-f_2}$	$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$

Estudio de las raíces de la representación lineal

1. Si: $\boxed{\Delta s \neq 0}$ El sistema es **compatible determinado.**
2. Si: $\boxed{\Delta s = 0}$ El sistema será **incompatible o absurdo.**

   $\boxed{\Delta x \neq 0 \vee \Delta y \neq 0}$ (o ambos) La división de un número conocido entre el cero no es posible.
3. Si: $\boxed{\Delta s = 0}$ y $\boxed{\Delta x = \Delta y = 0}$ El sistema será **compatible indeterminado.**

Ejemplos:

1. Enunciado segundo examen parcial CEPREUNI concurso 99-1 (matemática)

   Halla el valor de α, para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga más de una solución.

$$(\alpha - 1)x - 4y = 11 + \alpha$$
$$-x + (\alpha + 2)y = 2$$

Resolución:

- Para que el sistema tenga más de una solución (compatible indeterminado) se debe cumplir:

$$\boxed{\Delta s = 0 \quad \wedge \quad \Delta x = \Delta y = 0}$$

- Igualando a cero el determinante de la matriz de coeficientes (Δs):

$$\Delta s = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & -4 \\ -1 & \alpha + 2 \end{vmatrix} = (\alpha - 1)(\alpha + 2) - (-1)(-4) = \alpha^2 + \alpha - 2 - 4 = 0$$

$$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0$$

$$\begin{matrix} \alpha & +3 \\ \alpha & -2 \end{matrix} \Big\} \; (\alpha + 3)(\alpha - 2) = 0 \Rightarrow \alpha = -3 \vee \alpha = 2$$

- Si $\alpha = -3$:

  El sistema lineal será:

$$\begin{matrix} -4x - 4y = 8 \\ -x - y = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + y = -2 \\ x + y = -2 \end{matrix}$$

  Donde:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

- Si $\alpha = 2$:

  El sistema lineal será:

$$\begin{matrix} x - 4y = 13 \\ -x + 4y = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x - 4y = 13 \\ x - 4y = -2 \end{matrix}$$

  Donde:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 13 & -4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \wedge \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore$ Como se pudo haber comprobado, el sistema de ecuaciones tendrá más de una solución ($\Delta s = 0 \wedge \Delta x = \Delta y = 0$) cuando: $\alpha = -3$

Atención

Dos sistemas de ecuaciones lineales exactamente con las mismas incógnitas, se dice que son sistemas equivalentes si y solo si la raíz de una es raíz también de la otra.

Así:

El sistema lineal:

$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Cuya raíz es:
$x = 5$; $y = -8$

es equivalente al sistema lineal:

$\begin{cases} x = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

cuya raíz es también
$x = 5$; $y = -8$



Recuerda

La representación lineal:

$\boxed{\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}}$

Por la regla de Cramer:

$\boxed{x = \dfrac{\Delta x}{\Delta s} \quad o \quad y = \dfrac{\Delta y}{\Delta s}}$



Nota

El estudio de las raíces que se hizo al sistema lineal es genérico pudiéndose extender para aquellos que tengan 3 o más incógnitas o variables.



2. Si el sistema:

$$(m-3)x + (m+2)y = 2m+3$$
$$(m-1)x + (3m-1)y = 5m+1$$

es indeterminado. Halla m, si: $m > 1$

Resolución:

Si el sistema es indeterminado se cumple:

$$\frac{m-3}{m-1} = \frac{m+2}{3m-1} = \frac{2m+3}{5m+1} \quad ...(1)$$

Luego:

$$\frac{m-3}{m-1} = \frac{m+2}{3m-1}$$

$$\Rightarrow 3m^2 - m - 9m + 3 = m^2 + m - 2$$
$$2m^2 - 11m + 5 = 0$$
$$(m-5)(2m-1) = 0$$
$$\Rightarrow m = 5 \ \vee \ m = \frac{1}{2} \quad ...(2)$$

En (1):

$$\frac{m-3}{m-1} = \frac{2m+3}{5m+1}$$

Procedemos análogamente:

$$\Rightarrow m = 5 \vee m = 0 \quad ...(3)$$

De la ecuación (2) y (3), y de la condición $m > 1$, tenemos:
$m = 5$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS

Es aquel sistema cuyos términos independientes son iguales a cero:

$$Mx + Ny = 0$$
$$Px + Qy = 0$$

Para cualquier sistema lineal homogéneo se cumple: $x = 0 \ \wedge \ y = 0$, denominándose soluciones triviales o impropias.

Ejemplo:
Examen de admisión UNI 2012-I (matemática)
Halla la suma de todos los valores reales que puede tomar λ en la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{donde } x_1 \neq 0 \ \text{ y } \ x_2 \neq 0$$

Resolución:

- Transformando la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$x_1 + 2x_2 = \lambda x_1$$
$$2x_1 + x_2 = \lambda x_2$$

- Este sistema homogéneo tiene soluciones distintas a la solución trivial (0; 0):

$$(1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0$$
$$2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

Por dato del ejemplo: $x_1 \neq 0$
$x_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ necesariamente se debe cumplir:
$|A| = \Delta s = 0$
(Condición de compatibilidad)

$$|A| = \Delta s = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$
$$1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

- Raíces reales: $\lambda_1 \wedge \lambda_2$
(Δ = discriminante = $b^2 - 4ac = 16 > 0$)

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1}$$
$$\therefore \ \lambda_1 + \lambda_2 = 2$$



Atención

En forma matricial:

- **Sistema lineal homogéneo**

$A . X = 0$

La matriz de los términos independientes es una matriz nula.

$H = 0$

- **Sistema lineal no homogéneo**

$AX = H$

La matriz de los términos independientes no es una matriz nula.

$H \neq 0$

* Los sistemas de los ejemplos mostrados antes de llegar a este concepto son de esta clase.

Observación

Del sistema lineal homogéneo

$A . X = 0$

Condición de compatibilidad
Si: $|A| \neq 0$

$\Rightarrow$ El sistema tendrá soluciones triviales o impropias.

Si: $|A| = 0$

$\Rightarrow$ El sistema será compatible indeterminado

A: matriz de los coeficientes

$|A| = \Delta s$: Determinante del sistema o determinante de la matriz de los coeficientes.



1 Para qué valor de k, el sistema tiene infinitas soluciones.

$(2k - 1)x + y = 1$

$x + ky = 2k - 1$

Resolución:

Para que el sistema tenga infinitas soluciones se debe cumplir:

$\frac{2k-1}{1} = \frac{1}{k} = \frac{1}{2k-1}$

$\Rightarrow \frac{2k-1}{1} = \frac{1}{2k-1} \wedge 2k - 1 = k$

$(2k - 1)^2 = 1$ $\qquad k = 1$

$k = 1 \vee 0$ $\qquad \therefore k = 1$

2 Halla el mayor valor de (m + a) para que el sistema sea indeterminado.

$(m + 1)x + 4y = 3$

$6x + (m - 1)y = a - 3$

Resolución:

Para que el sistema sea indeterminado se debe cumplir que:

$\frac{m+1}{6} = \frac{4}{m-1} = \frac{3}{a-3}$

Luego:

$\frac{m+1}{6} = \frac{4}{m-1}$

$(m + 1)(m - 1) = 24$

$m^2 - 1^2 = 24$

$m^2 = 25$

$m = \pm 5$

$4(a - 3) = 3(m - 1)$

$4a - 12 = 3m - 3$

$4a = 9 + 3m$

Para: $m = 5 \Rightarrow a = 6$

$m = -5 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

El mayor valor de (a + m) es: $a + m = 6 + 5 = 11$

3 Determina el valor de k para que en el sistema, el valor de **y** sea igual al valor de z.

$3x + 7y + 2z = 1$

$2x + 3y + 7z = 1$

$kx + 2y + 3z = 0$

Resolución:

Haciendo y = z tenemos:

$3x + 9y = 1$ ...(1)

$2x + 10y = 1$ ...(2)

$kx + 5y = 0$ ...(3)

De la primera y segunda ecuación obtenemos:

$3x + 9y = 1$

$2x + 10y = 1$

Resolvemos por el método de igualación:

$\frac{1-9y}{3} = \frac{1-10y}{2}$

$2 - 18y = 3 - 30y$

$12y = 1$

$y = \frac{1}{12} \wedge x = \frac{1}{12}$

Reemplazando estos valores en la ecuación (3), tenemos:

$\frac{k}{12} + \frac{5}{12} = 0$

$\Rightarrow k = -5$

4 Resuelve:

$x + y + z = 6$

$2x - y + z = 3$

$4x - 2y + z = 3$

Da como respuesta: xyz

Resolución:

$x + y + z = 6$ ... (α)

$2x - y + z = 3$ ... (β)

$4x - 2y + z = 3$ ... (θ)

Igualando (β) y (θ):

$2x - y + z = 4x - 2y + z$

$y = 2x$ ... (ϕ)

Restando (α) – (β):

$(x + y + z) - (2x - y + z) = 6 - 3$

$2y - x = 3$

$x = 2y - 3$ ... (ψ)

Reemplazando (ψ) en (ϕ):

$y = 2(2y - 3)$

$3y = 6 \Rightarrow y = 2$

$y = 2x \Rightarrow x = 1$

Reemplazando $x = 1 \wedge y = 2$ en (α):

$1 + 2 + z + 6 \Rightarrow z = 3$

$\therefore xyz = 6$

5 Halla n si el sistema:

$3nx + 7y = 2$ ...(1)

$2nx + 5y = 6$ ...(2)

es determinado.

Resolución:

Multiplicamos a (1) por 5 y a (2) por 7:

$15nx + 35y = 10$ (–)

$14nx + 35y = 42$

$nx = -32$

$x = -\frac{32}{n}$

Para que sea determinado:

$n \in \mathbb{R} \wedge n \neq 0$



6 Calcula el valor de m para que el sistema sea incompatible.

$$(m+3)x + 2my = 5m - 9$$
$$(m+4)x + (3m-2)y = 2m+1$$

Resolución:

Se debe cumplir:

$$\frac{m+3}{m+4} = \frac{2m}{3m-2} \neq \frac{5m-9}{2m+1}$$

De la igualdad:

$$3m^2 + 7m - 6 = 2m^2 + 8m$$
$$m^2 - m - 6 = 0$$
$$(m-3)(m+2) = 0$$
$$m = 3 \vee m = -2$$

Si $m = 3 \Rightarrow \frac{6}{7} = \frac{6}{7} \neq \frac{6}{7}$ (no cumple con la condición)

Si $m = -2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-19}{-3}$ (sí cumple con la condición)

$\therefore\ m = -2$

7 De las igualdades mostradas indica el valor de z.

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{5} = \frac{z+x}{4}$$

$$7x + 5y + 11z = 300$$

Resolución

Si: $7x + 5y + 11z = 300$ ... (α)

Además:

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{5} = \frac{z+x}{4} = k$$

$x + y = 3k$ ... (I)

$y + z = 5k$ ... (II)

$z + x = 4k$ ... (III)

Sumando (I), (II) y (III):

$x + y + z = 6k$

Reemplazando en (I):

$3k + z = 6k \Rightarrow z = 3k$

Reemplazando en (II):

$x + 5k = 6k \Rightarrow x = k$

Reemplazando en (III):

$y + 4k = 6k \Rightarrow y = 2k$

Reemplazando en (α):

$$7(k) + 5(2k) + 11(3k) = 300$$
$$50k = 300 \Rightarrow k = 6$$

Nos piden:

$z = 3k = 3(6) = 18$

8 Resuelve:

$$\sqrt{2x+7y+1} + \sqrt{2x-7y+16} = 9$$
$$\sqrt{2x+7y+1} - \sqrt{2x-7y+16} = 3$$

Señala: $x + y$

Resolución:

$$\sqrt{2x+7y+1} + \sqrt{2x-7y+16} = 9 \qquad ...(I)$$
$$\sqrt{2x+7y+1} - \sqrt{2x-7y+16} = 3 \qquad ...(II)$$

Al multiplicar se forma diferencia de cuadrados.

$$(2x + 7y + 1) - (2x - 7y + 16) = 27$$
$$14y - 15 = 27$$
$$14y = 42 \Rightarrow y = 3$$

Sumando (I) y (II):

$2\sqrt{2x+7y+1} = 12$; de donde: $x = 7$

Nos piden: $x + y = 10$

9 Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$$

Indica el valor de x.

Resolución:

Del sistema:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad ...(I)$$

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 1 \qquad ...(II)$$

Multiplicando en (I) y (II) por b y a, respectivamente se tiene:

$$\frac{b}{a}x + y = b \quad ...(\alpha)$$
$$\frac{a}{b}x - y = a \quad ...(\beta)$$

Sumando (α) y (β):

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x = a + b \Rightarrow x = \frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2}$$

10 Si el sistema:

$$x + y = -3$$
$$3x - 5y = n$$

Tiene solución única en el tercer cuadrante del plano $xy(x < 0 \wedge y < 0)$ entonces los valores de n pertenecen a:

Resolución:

El sistema:

$$x + y = -3 \qquad ...(I)$$
$$3x - 5y = n \qquad ...(II)$$

Multiplicando en (I) por 5 y sumando (II) se tiene:

$$8x = n - 15 \Rightarrow x = \frac{n-15}{8} \qquad ...(\alpha)$$

Dato: $\frac{n-15}{8} < 0 \Rightarrow n < 15$ ...(β)

Reemplazando (α) en (I): $y = -\frac{(n+9)}{8}$

Dato: $-\frac{(n+9)}{8} < 0 \Rightarrow n > -9$ ...(θ)

De $(\beta) \wedge (\theta)$: Se tiene: $-9 < n < 15 \Rightarrow n \in \langle -9; 15 \rangle$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO
PLANTEO DE ECUACIONES

Recuerda

$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; a \neq 0$

- a : coeficiente principal
- ax^2 : término cuadrático
- bx : término lineal
- c : término independiente
- x : incógnita

Atención

Las raíces de la ecuación cuadrática:

$$6x^2 + 11x - 7 = 0$$

Se obtienen por:

A) Factorización (aspa simple)

$6x^2 + 11x - 7 = 0$

$3x \quad +7$

$2x \quad -1$

$x = -\frac{7}{3} \vee x = \frac{1}{2}$

B) Fórmula general

$6x^2 + 11x - 7 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\begin{cases} a = 6 \\ b = 11 \\ c = -7 \end{cases}$

$x = \frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4(6)(-7)}}{2(6)}$

$x = -\frac{7}{3} \vee x = \frac{1}{2}$

C) Completando cuadrados

$6x^2 + 11x - 7 = 0$

$x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{7}{6} = 0$

$x^2 + \frac{11}{6}x + \left(\frac{11}{12}\right)^2 - \left(\frac{11}{12}\right)^2 - \frac{7}{6} = 0$

$\left(x + \frac{11}{12}\right)^2 - \left(\frac{17}{12}\right)^2 = 0$

$\left(x + \frac{11}{12} + \frac{17}{12}\right)\left(x + \frac{11}{12} - \frac{17}{12}\right) = 0$

$x = -\frac{7}{3} \vee x = \frac{1}{2}$

DEFINICIÓN

Llamadas también ecuaciones cuadráticas, son aquellas ecuaciones polinómicas de una incógnita, cuya forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0$$

NATURALEZA DE LAS RAÍCES

Analizando el discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, tenemos:

A) Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

La ecuación presenta dos raíces reales y distintas. $\quad \} \; x_1 \neq x_2$

B) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

La ecuación presenta dos raíces complejas y conjugadas. $\quad \} \; \begin{cases} x_1 = m + ni \\ x_2 = m - ni \\ x_2 = \bar{x}_1 \end{cases} \; m, n \in \mathbb{R}$

C) Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

La ecuación presenta dos raíces reales e iguales o una raíz doble. $\quad \} \; x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Propiedades de las raíces (Teorema de Cardano - Viette)

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Suma de raíces (S)

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2. Producto de raíces (P)

$$P = x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a}$$

3. Diferencia de raíces (D)

$$D = x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

4. Raíces simétricas (opuestas)

$$x_1 + x_2 = 0$$

5. Raíces recíprocas

$$x_1 \,.\, x_2 = 1$$

Ejemplo:

Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $2x^3 + (a - 4)x^2 + (1 - 2a)x - 2 = 0$, donde: $x_1 - x_2 = 0{,}5$; determina el valor de a ($a > 0$).

Resolución:

- La ecuación se anula para $x = 2$, luego por Ruffini:

	2	(a – 4)	(1 – 2a)	–2
x = 2	↓	4	2a	2
	2	a	1	0

- Obtenemos un factor cuadrático de raíces x_1 y x_2, según condición del problema:

$2x^2 + ax + 1 \Rightarrow CS = \{x_1; x_2\}$

$(x - 2)(2x^2 + ax + 1) = 0$

- Por las propiedades de las raíces:

$x_1 + x_2 = -\frac{a}{2}$ ...(1)

$x_1 \,.\, x_2 = \frac{1}{2}$ ...(2)

- Por dato del ejemplo: $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$ ...(3)

- Reemplazando (1), (2) y (3) en la identidad de Legendre: $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$

$$\left(-\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{a^2 - 1}{4} = 2$$

$$a^2 = 9 \begin{cases} a = 3 \\ \vee \\ a = -3 \\ \text{(no cumple porque } a > 0) \end{cases}$$

$\therefore \; a = 3$



ECUACIONES CUADRÁTICAS EQUIVALENTES

Dado el siguiente sistema de ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \; ; \; a_1 \neq 0 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \; ; \; a_2 \neq 0 \end{cases}$$

- Para que ambas ecuaciones sean equivalentes, es decir, tengan las mismas raíces, se debe cumplir la relación de proporcionalidad entre los coeficientes de sus respectivos términos semejantes, así:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- Cuando ambas ecuaciones admiten una raíz común (teorema de Bezout):

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (a_1c_2 - a_2c_1)^2$$

Ejemplos:

1. Si las ecuaciones: $(a + 1)x^2 + (b + 1)x + 5 = 0 \wedge (5a + 1)x^2 + (4b + 1)x + 15 = 0$ son equivalentes, determina: b^{b^a}

   Resolución:
   - Si las ecuaciones son equivalentes se cumple:

   $$\frac{a+1}{5a+1} = \frac{b+1}{4b+1} = \frac{1}{3}$$

   (② relaciona $\frac{b+1}{4b+1}$ con $\frac{1}{3}$; ① relaciona $\frac{a+1}{5a+1}$ con $\frac{1}{3}$)

   - De (1) desarrollamos:

   $$\frac{a+1}{5a+1} = \frac{1}{3}$$

   $$3a + 3 = 5a + 1 \Rightarrow a = 1$$

   - De (2) desarrollamos:

   $$\frac{b+1}{4b+1} = \frac{1}{3}$$

   $$3b + 3 = 4b + 1 \Rightarrow b = 2$$

   - Nos piden: $b^{b^a} = 2^{2^1} = 4$

2. Las ecuaciones: $x^2 - mx + 8 \;\wedge\; x^2 - nx + 10$, tienen una raíz común. Halla m.n, si: $m - n = -1$.

   Resolución:
   - Por el teorema de Bezout:

   $$[(1)(-n) - (1)(-m)][(-m)(10) - (-n)(8)]$$
   $$= [(1)(10) - (1)(8)]^2$$
   $$= \underbrace{(m - n)}_{-1}(8n - 10m) = 4$$
   $$\Rightarrow 8n - 10m = -4$$
   $$4n - 5m = -2$$

   - Formamos un sistema:

   $$\begin{cases} m - n = -1 \\ 4n - 5m = -2 \end{cases}$$

   - Resolvemos el sistema:

   $m = 6 \;\wedge\; n = 7$

   $\therefore m \,.\, n = 6 \,.\, 7 = 42$

PLANTEO DE ECUACIONES

Sobre datos numéricos

Ejemplo:

Verónica compra cierto número de botellas de reactivos para ciertas pruebas en el laboratorio por S/.560. Si cada botella le hubiera costado S/.5 menos habría podido comprar con la misma suma de dinero 2 botellas más. Determina cuántas botellas de reactivo compró.

Resolución:

- Sea B: el número de botellas de reactivos para ciertas pruebas en el laboratorio que compró Verónica por S/.560.
- Si cada botella le hubiera costado S/.5 menos, esto es S/. $\left(\frac{560}{B} - 5\right)$ con la misma cantidad de dinero le hubiera bastado comprar 2 botellas más, así:

$$\left(\frac{560}{B} - 5\right)(B + 2) = 560$$

- Realizando las operaciones adecuadamente obtenemos:

$$\left(\frac{112}{B} - 1\right)(B + 2) = 112$$

$$(112 - B)(B + 2) = 112B$$

$$B(B + 2) = 14 \times 16 \Rightarrow B = 14$$

- Por consiguiente, Verónica compró 14 botellas de reactivo.

Recuerda

Posibles ceros racionales de una ecuación(PCR)

Ejemplo:

$2x^3 + (a - 4)x^2 + (1 - 2a)x - 2 = 0$

$$PCR = \pm\left\{\frac{1;2}{1;2}\right\} = \pm\left\{1; \frac{1}{2}; 2\right\}$$

- Identidad de Legendre:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$



Nota

A la condición de compatibilidad:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (a_1c_2 - a_2c_1)^2$$

se le conoce también como:

BEZOUTIANA

Atención

- Si con S/.560 compró B botellas, entonces el costo de cada botella se halla como:

$$\frac{S/.}{botella} = \frac{\text{Dinero total}}{\text{n.° total de botellas}}$$

Esto es:

$$\frac{S/.}{botella} = \frac{S/.560}{B}$$

- El costo por cada botella multiplicado por el número de botellas nos da el total del dinero.

$$\left(\frac{S/.}{botella}\right).(\text{n.° botellas}) = S/.560$$

Problemas resueltos

1 En la ecuación:
$x^2 - mx + 36 = 0$
halla **m** tal que: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{15}{12}$
siendo x_1 y x_2 raíces de la ecuación.

Resolución:

Por dato: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{15}{12}$; $\frac{x_1 + x_2}{x_1 . x_2} = \frac{15}{12}$

Sabemos que: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-m)}{1} = m$

$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = \frac{36}{1} = 36$

Reemplazando: $\frac{m}{36} = \frac{15}{12} \Rightarrow m = \frac{15 . 36}{12} = 45$

2 Halla **n**, si las raíces son iguales:
$(n + 2)x^2 - 6nx + 9 = 0$

Resolución:

Si: $x_1 = x_2 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

Luego: $(-6n)^2 - 4(n + 2)(9) = 0$

Efectuando:
$n^2 - n - 2 = 0$

$n \quad -2$
$n \quad 1$ $\Rightarrow$ $(n - 2)(n + 1) = 0$
$n = 2 \vee n = -1$

Luego los valores de **n** son: $2 \vee -1$

3 Halla **n** para que las raíces de la ecuación sean simétricas:
$\frac{x^2 + 3x}{5x + 2} = \frac{n - 1}{n + 1}$

Resolución:

Por ser simétricas se debe cumplir: $x_1 + x_2 = 0$

Efectuando y reduciendo tenemos:
$(n + 1)x^2 + (8 - 2n)x - 2(n - 1) = 0$

Como: $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \frac{-(8 - 2n)}{n + 1} = 0$

$-8 + 2n = 0 \Rightarrow n = 4$

4 Halla **m** para que una de las raíces sea el triple de la otra, en:
$x^2 - (m + 4)x + (5m - 8) = 0$

Resolución:

Por dato: $x_1 = 3x_2$ ... (1)

Por propiedad: $x_1 + x_2 = m + 4$

$3x_2 + x_2 = m + 4$

$x_2 = \frac{m + 4}{4}$ ... (2)

Por propiedad:
$x_1 . x_2 = (5m - 8)$ ... (3)

(2) en (1):
$x_1 = \frac{3}{4}(m + 4)$ ... (4)

Reemplazando (2) y (4) en (3):

$\frac{3}{4}(m + 4).\left(\frac{m + 4}{4}\right) = 5m - 8$

Efectuando tenemos:

$m = 4 \vee m = \frac{44}{3}$

5 Halla **n** para que las raíces de la ecuación sean complejas conjugadas:
$x^2 + 5x + n = 0$

Resolución:

$x^2 + 5x + n = 0$

$5^2 - 4(n) < 0 \Rightarrow 25 < 4n \qquad \therefore \ n > \frac{25}{4}$

6 Halla **n**, sabiendo que las raíces se diferencian en 3 unidades:
$x^2 - 7x + n = 0$

Resolución:

Sean x_1 y x_2 raíces de la ecuación:

$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{(-7)^2 - 4(n)}}{1} = 3$

$49 - 4n = 9 \Rightarrow 4n = 40 \qquad \therefore \ n = 10$

7 Si las ecuaciones cuadráticas:
$x^2 + x - (n + 1) = 0$
$x^2 + 2x - (2n + 1) = 0$
tienen una raíz común, halla **n.**

Resolución:

Asumimos que **a** es la raíz común.

Luego: $a^2 + a - (n + 1) = 0$ ...(I)

$a^2 + 2a - (2n + 1) = 0$ ...(II)

Restando (II) de (I): $n - a = 0 \Rightarrow a = n$

En (I): $n^2 + n - (n + 1) = 0$

$n^2 - 1 = 0$

$(n + 1)(n - 1) = 0$

$n + 1 = 0 \vee n - 1 = 0 \Rightarrow n = -1 \vee n = 1$

8 Si: $mx^2 - 24x + m - 7 = 0$ tiene sus raíces iguales, ¿cuál es el menor valor de **m** que verifica la ecuación?

Resolución:

$mx^2 - 24x + m - 7 = 0$

Dato: $x_1 = x_2$

Se cumple:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac$

Reemplazando:

$(-24)^2 = 4m(m - 7)$

$144 = m(m - 7)$

$m^2 - 7m - 144 = 0$

$m \quad -16$
$m \quad 9$

$m = 16 \vee m = -9$

$\therefore$ El menor valor es: -9

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR



ECUACIONES POLINOMIALES DE GRADO SUPERIOR

Sea el polinomio: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_{n-1}x + a_n;\ a_0 \neq 0 \ \wedge\ n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq 3$

Donde: $a_0; a_1; a_2; \ldots; a_{n-1}; a_n$ son coeficientes que pertenecen a $\mathbb{C}$ (números complejos)

Se denomina ecuación polinomial a: $\boxed{P(x) = 0}$ ecuación polinomial de grado n.

Ejemplo:

$$\underbrace{P(x) = x^5 - x^3 - x + 2}_{\text{Polinomio}} \qquad \underbrace{x^5 - x^3 - x + 2 = 0}_{\text{Ecuación polinomial}}$$

Nota

A la raíz de una ecuación polinómica también se le llama solución de P(x), pero no considera la multiplicidad.

$\Rightarrow$ n.° raíces de P(x) $\geq$ n.° de soluciones del P(x)

RAÍZ O CERO DE UN POLINOMIO

Es el valor que hace que el polinomio sea cero.
Sea un "α" ($\alpha \in \mathbb{C}$) o $x = \alpha$ es raíz del polinomio $P(x) \Leftrightarrow P(\alpha) = 0$

Ejemplo:
Sea el polinomio $P(x) = x^3 - x + 6$
$x = -2$ es raíz de P(x) $\Leftrightarrow P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 - (-2) + 6 = 0$

Teorema del factor

Si $x = \alpha$ es raíz o cero del polinomio P(x) $\Rightarrow$ $(x - \alpha)$ es factor del polinomio es decir;

$$\boxed{P(x) = (x - \alpha)Q(x)}$$

Si P(x) es de grado n $\Rightarrow$ Q(x) es de grado n – 1.

En general:

Si $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ son raíces del polinomio P(x) de grado n $\Rightarrow$ $\boxed{P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)Q(x)}$

Grado: n — Grado: n – 3

Observación

Si P(x) de coeficientes racionales posee una raíz: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b};\ -\sqrt{a} - \sqrt{b};\ -\sqrt{a} + \sqrt{b}$

también son raíces de P(x).



Raíz de multiplicidad "k" de P(x)

Sea α una raíz de multiplicidad k que pertenece a $\mathbb{C}$.

El polinomio se expresa así:

$$\boxed{P(x) = (x - \alpha)^kQ(x)}\ ;\ \text{grado de } Q(x): n - k$$

Ejemplo:
Sea el polinomio $P(x) = \sqrt{3}\,(x - 2)^3(x - 1)(x - 3)^2$

- 2 es una raíz de multiplicidad 3 (raíz triple)
- 1 es una raíz de multiplicidad 1 (raíz simple)
- 3 es una raíz el multiplicidad 2 (raíz doble)

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Toda ecuación polinomial de grado "n" ($n \in \mathbb{N}$) y de coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz real o imaginaria, es decir, una raíz compleja.

Corolario

Todo polinomio de grado "n" ($n \in \mathbb{Z}^+$) de coeficientes en los números complejos, tiene exactamente "n" raíces contadas con sus respectivas multiplicidades.

Nota

Sea:
$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} ... a_{n-1}x + a_n$

$\Rightarrow \sum \text{raíces} = -\frac{a_1}{a_0}$

$\Rightarrow \sum_{i \neq j} x_ix_j = \frac{a_2}{a_0}$ (producto binario)

$\Rightarrow \sum x_ix_jx_k = \frac{-a_3}{a_0}$ (producto ternario)

Así sucesivamente hasta llegar al producto de raíces.

Para aplicar esta regla el polinomio debe estar completo y ordenado.

Importante

Sean $x_1; x_2; x_3; ... x_n$ raíces de una ecuación polinómica de grado n, y:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_n^2$

la suma de los cuadrados de dichas raíces.

Se cumple:

$\Sigma \text{cuadrados de las raíces} = (\Sigma \text{raíces})^2 - 2\left(\Sigma \text{productos binarios}\right)$



Ten presente

En una ecuación polinomial

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} ... a_{n-1}x + a_n$

$\underbrace{P.C.}_{\text{posibles ceros}} = \pm\left\{\frac{\text{Divisores}|a_n|}{\text{Divisores}|a_0|}\right\}$

Ejemplo:
Posibles ceros de:
$2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x - 6$

$P.C. = \pm\left\{\frac{1; 2; 3; 6}{1; 2}\right\}$

$P.C. = \pm\frac{1}{2}; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6 ...$

Observamos que -2 es raíz, entonces el polinomio se puede expresar como:

$(x + 2)\underbrace{(\theta_1(x))}_{\text{grado 3}} = 0$

Teorema de paridad de raíces

1. Si el polinomio P(x) de coeficientes en $\mathbb{Q}$ (racionales) posee una raíz irracional de la forma $x_1 = a + \sqrt{b}$ $(a \in \mathbb{Z} \wedge b > 0 \in \mathbb{Q}) \Rightarrow$ la otra raíz es la conjugada irracional:
   $x_2 = a - \sqrt{b}$ con igual multiplicidad que x_1.
2. Si el polinomio P(x) de coeficientes en $\mathbb{R}$ tiene una raíz imaginaria de la forma $a + bi$; $(a \wedge b \in \mathbb{R}, b \neq 0) \Rightarrow$ otra de las raíces es su conjugada imaginaria $a - bi$.

Teorema de Cardano - Viette

Sea la ecuación polinomial de grado **n** y coeficientes complejos:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

$n \in \mathbb{Z}^+ \wedge x_1; x_2; x_3; x_4; ...; x_n$ son sus **n** raíces simples, se cumple:

1. **Suma de raíces**
   $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} + x_n = \frac{-a_1}{a_0}$
2. **Suma de productos binarios de las raíces**
   $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$
3. **Suma de productos ternarios de las raíces**
   $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{-a_3}{a_0}$
4. **Producto de raíces**
   $x_1x_2x_3 ... x_{n-1}x_n = (-1)^n = \frac{a_n}{a_0}$

Teorema del valor intermedio (para funciones continuas)

En todo polinomio P(x) de coeficientes reales si: $P(a) . P(b) < 0$; entonces existe al menos una raíz real $x_0 \in \langle a; b\rangle$.

ECUACIONES RECÍPROCAS

Se denominan así a las ecuaciones cuyos coeficientes de términos equidistantes de los extremos son iguales en valor absoluto.

Ejemplos:

$x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ $\qquad$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Propiedades

1. Si r es raíz de la ecuación recíproca, entonces 1/r también es raíz de la ecuación.
2. Si la ecuación recíproca es de grado impar, tiene una raíz 1 o -1, (se evalúa para determinarla).
3. Si $P(x) = 0$ es una ecuación polinómica recíproca, se cumple:

$$P(x) = x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$$

Resolución de ecuaciones recíprocas

Si es de grado par: se factoriza la parte literal del término central y se realiza el cambio de variable.

$a = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$

Ejemplo:

Resuelve: $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

Resolución:

Factorizamos: $x^2\left[x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}\right]$

Agrupamos y usamos el cambio de variable:

$a = x + \frac{1}{x}$

$x^2(a^2 - 2 - 7(a) + 14)$

$x^2(a^2 - 7a + 12)$

a $\quad$ -4
a $\quad$ -3

$x^2(a - 4)(a - 3) = 0$

$x^2\left(x + \frac{1}{x} - 4\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$

$(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$

$\therefore x = 2 \pm \sqrt{3} \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$



Si es de grado impar

- Se factoriza por el método de los divisores binómicos evaluando para $x = 1$ o $x = -1$.
- Se obtiene un factor lineal y otro factor es un polinomio recíproco de grado par, para resolverlo se aplica el caso anterior.

Ejemplo:
Resuelve: $4x^5 - 2x^4 + 2x - 4 = 0$

Resolución:

Se anula para $x = 1$, entonces:

$$(x-1)\underbrace{(4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 4)} = 0$$

$$x^2\left[4\underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}_{a^2-2} + 2\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{a} + 2\right]$$

$4a^2 + 2a - 6 = 0$

$$\begin{matrix} 2a & & 3 \\ 2a & & -2 \end{matrix}$$

$(x-1)(x^2)(2a+3)(2a-2) = 0$

Volviendo a la variable original:

$$(x-1)(x^2)\left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right)\left(2\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\right) = 0$$

Resolviendo:

$(x-1)(2x^2 + 3x + 2)(2x^2 - 2x + 2) = 0$

$$\Rightarrow\ x = 1;\ \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{4}\ ;\ \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{4}$$

$$\therefore\ \text{Raíces} = \left\{1; \frac{-3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}\,i}{4}; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

Recuerda

Unidad imaginaria
Se obtiene al extraer la raíz cuadrada de -1, se representa así:

$\sqrt{-1} = i$



ECUACIÓN BICUADRADA

Es una ecuación polinomial de cuarto grado, presenta la siguiente forma:

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}\ ;\ abc \neq 0$$

Para resolver la ecuación bicuadrada que no es factorizable se usa:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$; la cual nos brinda las 4 soluciones.
Donde: $b^2 - 4ac = \Delta$(discriminante o invariante)

Nota

Reconstrucción de una ecuación bicuadrada de raíces x_1; x_2; x_3 y x_4 (por Cardano - Viette):

$$x^4 + \begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{productos}\\ \text{binarios}\end{pmatrix}x^2 + \begin{pmatrix}\text{producto}\\ \text{de raíces}\end{pmatrix} = 0$$

ECUACIÓN BINOMIA

Son ecuaciones de dos términos, presentan la siguiente forma: $\boxed{ax^n + b = 0}$; $\forall\ ab \neq 0\ \wedge\ n \in \mathbb{N}$

- Se resuelven factorizando o usando el teorema de Moivre.
- Solo tienen raíces simples, no aceptan raíces múltiples.

ECUACIÓN TRINOMIA

Son ecuaciones de tres términos, presentan la siguiente forma: $\boxed{ax^{2n} + bx^n + c = 0}$; $\forall\ abc \neq 0\ \wedge\ n \in \mathbb{N}$

- Se resuelven factorizando o realizando el cambio de variable $x^n = z$, la cual la convierte en una ecuación cuadrática, luego de resolverla se vuelve a la variable original.

Atención

Para la demostración de la solución de una ecuación bicuadrada se realiza el siguiente cambio de variable: $x^2 = z$ en $ax^4 + bx^2 + c = 0$



Transformaciones de las ecuaciones

Sea $P(x) = 0$ la ecuación polinomial de grado n, de raíces x_1, x_2; x_3; ...; x_n, tenemos:

a) Cambiar de signo: para obtener la ecuación cuyas raíces sean:
$-x_1$; $-x_2$; $-x_3$ ... $-x_n$, se realiza el cambio de $P(x)$ por $P(-x)$.

b) Raíces aumentadas en una constante: para aumentar las raíces en una constante:
$x_1 + k$; $x_2 + k$; $x_3 + k$; ...; $kx_n + k$,
se cambia la variable x por $x - k$ en la ecuación original.

c) Mutiplicar por una constante: para obtener la ecuación cuya raíces sean: kx_1, kx_2 ... kx_n, se cambia la variable x por $\frac{x}{k}$ y se evalúa en P(x).

Es decir; se realiza $P(x)\ \Rightarrow\ P\left(\frac{x}{k}\right)$

d) Raíces recíprocas: para cambiar las raíces del polinomio P(x) por sus recíprocas $\frac{1}{x_1}; \frac{1}{x_2}; \frac{1}{x_3}; ... ;\frac{1}{x_n}$, se realiza el cambio de x por $\frac{1}{x} \Rightarrow P(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)$

e) Cuadrado de raíces: para transformar P(x) con raíces $x_1; x_2; ...; x_n$ a $P_1(x)$ con raíces $x_1^2; x_2^2; ...; x_n^2$, se reemplaza x por $\sqrt{x} \Rightarrow P(x) = P(\sqrt{x})$

Ejemplo:
Sea $P(x) = x^2 - 3x - 4$ de raíces $x_1; x_2$.
Determina la ecuación polinomial cuadrática de raíces: $(3x_1; 3x_2)$;$(-x_1; -x_2)$; $\left(\frac{1}{x_1};\frac{1}{x_2}\right)$ y $(x_1^2; x_2^2)$

Resolución:

I. $P(x) = P\left(\frac{x}{3}\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{3}\right) - 4 \Rightarrow P(x) = \frac{x^2}{9} - x - 4$

$\Rightarrow$ La ecuación: $x^2 - 9x - 36 = 0$ tiene raíces: $3x_1; 3x_2$

II. $P(x) = P(-x) = (-x)^2 - 3(-x) - 4 \Rightarrow P(x) = x^2 + 3x - 4$

$\Rightarrow$ La ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$ tiene raíces: $-x_1; -x_2$

III. $P(x) = P(1/x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \Rightarrow P(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4$

Multiplicamos a P(x) por $x^2 \Rightarrow$ P(x): $-4x^2 - 3x + 1 = 0$ tiene raíces: $\frac{1}{x_1}$; $\frac{1}{x_2}$

IV. $P(x) = P(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 3(\sqrt{x}) - 4 \Rightarrow P(x) = x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Despejamos $\sqrt{x}$ y elevamos al cuadrado; la ecuación de raíces $x_1^2; x_2^2$ es:

$x^2 - 17x + 16 = 0$

Recuerda

Sean x_1 y x_2 las raíces de una ecuación cuadrática.
Si x_1 y x_2 son recíprocas, entonces se cumple:

$x_1 . x_2 = 1$

Es decir:
$x_1 = \frac{1}{x_2} \vee x_2 = \frac{1}{x_1}$



Observación

Reconstrucción de una ecuación cuadrática
Teniendo en cuenta que:
S = Suma de raíces de la ecuación cuadrática.
P = Producto de raíces de la ecuación cuadrática.
Toda ecuación cuadrática se determina con la relación:

E: $x^2 - Sx + P = 0$



Más ejemplos:

1. Si la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$, tiene como raíces a x_1 y x_2; y la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tiene como raíces a x_1^2 y x_2^2, halla: a + b + c, si a < 2 ($a \in \mathbb{N}$).

Resolución:

- Transformamos la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$, haciendo el cambio de x por $\sqrt{x}$:

$$(\sqrt{x})^2 - 6(\sqrt{x}) + 8 = 0 \Rightarrow x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$$

- En la ecuación obtenida, despejamos $\sqrt{x}$ y elevamos al cuadrado:

$$(\sqrt{x})^2 = \left(\frac{x+8}{6}\right)^2$$

$\Rightarrow x^2 - 20x + 64 = 0$

- Comparamos:

$x^2 - 20x + 64 = ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow a = 1; b = -20$ y $c = 64$

$\therefore a + b + c = 1 + (-20) + 64 = 45$

2. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $4x^2 - 8x + 3 = 0$ y $2x_1$ y $2x_2$ son las raíces de la ecuación $mx^2 + px + q = 0$, halla el valor de: $\frac{p+q}{m}$, siendo q < 4; ($q \in \mathbb{N}$).

Resolución:

- Observamos que en una de las ecuaciones, las raíces están multiplicadas por un valor constante:

$$\left.\begin{array}{l} kx_1 = 2x_1 \\ kx_2 = 2x_2 \end{array}\right\} k = 2$$

- Transformamos la ecuación $4x^2 - 8x + 3 = 0$, haciendo el cambio de x por $\frac{x}{2}$:

$4\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{x}{2}\right) + 3 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

- Comparamos:

$x^2 - 4x + 3 = mx^2 + px + q = 0$

$m = 1; p = -4$ y $q = 3$

$\therefore \frac{p+q}{m} = \frac{-4+3}{1} = -1$

Problemas resueltos

1 Determina las raíces con sus respectivas multiplicidades de:
$P(x) = x^3 + 3x + 4$

Resolución:

$PC = \pm\{1; 2; 4\}$

Observamos que -1 es raíz de P(x), es decir: $P(-1) = 0$.
Factorizamos por Ruffini; el factor es $(x + 1)$

	1	0	3	4
−1		−1	1	−4
	1	−1	4	0

$\Rightarrow P(x) = \underbrace{(x+1)}(x^2 - x + 4)$

Raíz: −1
de multiplicidad 1

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4(4)}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

$\Rightarrow$ Tiene 3 raíces de multiplicidad 1:

que son $\left(1; 1/2 + \frac{\sqrt{15}}{2}i; 1/2 - \frac{\sqrt{15}}{2}i\right)$

2 Se sabe que 2; 7 y 3 son las raíces de P(x).
Determina la suma de coeficientes del polinomio, si $P(8) = 90$

Resolución:

Sabemos que 2; 7 y 3 son raíces de P(x):
$\Rightarrow P(x) = a_0(x - 2)(x - 7)(x - 3)$

Del dato: $P(8) = 90$
$\Rightarrow \underbrace{P(8)}_{90} = a_o(8 - 2)(8 - 7)(8 - 3)$

De donde: $a_o = 3$
Σcoeficientes de $P(x) = P(1)$:
$\Rightarrow P(1) = 3(-1)(-6)(-2)$
$\therefore P(1) = -36$

3 Halla una ecuación polinomial de coeficientes racionales y de menor grado, donde una de sus raíces es $2 + \sqrt[3]{3}$.

Resolución:

Si $x = 2 + \sqrt[3]{3}$, hallar la ecuación de coeficientes racionales implica eliminar los índices de los radicales de: $x = 2 + \sqrt[3]{3} \Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{3}$

Elevando al cubo:

$(x-2)^3 = (\sqrt[3]{3})^3 \quad \Rightarrow x^3 - 3x^2(2) + 3x(4) - 8 = 3$
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 3$
$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 11 = 0$

$\therefore$ La ecuación polinomial será: $x^3 - 6x^2 + 12x - 11 = 0$

4 Si x_1, x_2, x_3 son las raíces de la ecuación:
$5x^3 - 7x^2 + 4x - 8 = 0$,
halla: $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

Resolución:

Efectuando:

$$A = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3}$$

Por Cardano–Viette:

$$A = \frac{\frac{4}{5}}{-\left(\frac{-8}{5}\right)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{8}{5}}$$

$\therefore A = \frac{1}{2}$

5 Resuelve la ecuación en x:
$x^4 + ax^3 + 2x + b = 0$,
si se sabe que admite una raíz real de multiplicidad tres.

Resolución:

Sean α, α, α y β las raíces $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Por el teorema de Cardano - Viette.
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3\alpha + \beta = -a$ ... (I)

Suma de productos binarios: $3\alpha(\alpha + \beta) = 0$

Donde: $\alpha = 0 \vee \alpha = -\beta$ ... (II)

Productos ternarios: $\alpha^2(\alpha + 3\beta) = -2$ ... (III)

Observamos que: $\alpha \neq 0$

De (II) y (III): $\alpha = -\beta \wedge \alpha^2(\alpha + 3\beta) = -2$

Se tiene:
$(-\beta)^2(-\beta + 3\beta) = -2 \Rightarrow \beta = -1$

$\Rightarrow$ Las raíces son: 1; 1; 1 y −1.

6 ¿Cuántas raíces reales tiene el polinomio:
$P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 11$?

Resolución:

Por el teorema del valor intermedio se verifica:

$P(-2) . P(-1) < 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \in \langle -2; -1\rangle \,/\, P(x_1) = 0$

$P(1) . P(2) < 0 \Rightarrow \exists\, x_2 \in \langle 1; 2\rangle \,/\, P(x_2) = 0$

$P(3) . P(4) < 0 \Rightarrow \exists\, x_3 \in \langle 3; 4\rangle \,/\, P(x_3) = 0$

$\therefore$ El polinomio tiene tres raíces reales.

7 Si $(1 + i)$ es una raíz de $x^5 + ax^3 + b = 0$, con $a; b \in \mathbb{R}$, halla $(a + b)$.

Resolución:

Por el teorema de la paridad de raíces, si $(1 + i)$ es una raíz, la otra será $(1 - i)$, siendo $x^2 - 2x + 2 = 0$ la ecuación que genera a estas raíces y lo cual implica que $x^2 - 2x + 2$ es un factor de $x^5 + ax^3 + b = 0$.

Luego, por Horner:

1	1	0	a	0	0	b
2		2	−2			
−2			4	−4		
				2a+4	−2a−4	
					4a	−4a
	1	2	a+2	2a	0	0

Como es exacta (definición de factor), tenemos:

- $-2a - 4 + 4a = 0 \quad \Rightarrow a = 2$
- $b - 4a = 0 \quad \Rightarrow b = 8$

$\therefore a + b = 2 + 8 = 10$

8 Las raíces de la ecuación: $x^3 - 3x - 1 = 0$ son a; b; c.
Calcula:
$S = f(a) + f(b) + f(c)$

Siendo: $f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 1)^2}$

Resolución

De la ecuación:
$x^3 - 3x - 1 = 0$; CS = {a; b; c}
$f(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 1)^2}$

Nos piden:
$S = f(a) + f(b) + f(c)$
$S = \dfrac{1}{(a^3 - 1)^2} + \dfrac{1}{(b^3 - 1)^2} + \dfrac{1}{(c^3 - 1)^2} \quad ...(\alpha)$

De la ecuación:
$x^3 - 1 = 3x$

Reemplazando las raíces:
$a^3 - 1 = 3a$
$b^3 - 1 = 3b$
$c^3 - 1 = 3c$

En (α):
$S = \dfrac{1}{9}\left\{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}\right\}$

$S = \dfrac{1}{9}\left\{\dfrac{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2}{(abc)^2}\right\}$

Sabemos por el teorema de Cardano-Viette:
$a + b + c = 0 \quad ...(I)$
$ab + bc + ac = -3 \quad ...(II)$
$abc = -(-1) = 1 \quad ...(III)$

Elevando al cuadrado en (II):
$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 - 2abc(a + b + c) = 9$
$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 = 9$

Luego: $S = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{9}{1}\right) = 1$

9 Obtén una ecuación bicuadrada en x, sabiendo que dos de sus raíces son las raíces de la ecuación:
$z^2 - 4z - 7 = 0$

Resolución:

Dada la ecuación: $z^2 - 4z - 7 = 0$

Sabemos que:
$z_1 + z_2 = 4 \quad ...(I)$
$z_1z_2 = -7 \quad ...(II)$

Nos piden: $x^4 - (z_1^2 + z_2^2)x^2 + (z_1z_2)^2 = 0 \quad ...(\alpha)$

De (I) y (II):
$z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 16$
$z_1^2 + z_2^2 = 30$

Reemplazando en (α):
$\therefore x^4 - 30x^2 + 49 = 0$

10 Si a_i; $\forall i \in [1; n]$ son raíces de la siguiente ecuación:
$x^5 + 3x^4 - 2x + 1 = 0$
Calcula: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{3}{2a_i - 1}$

Resolución

De la ecuación: $x^5 + 3x^4 - 2x + 1 = 0$

Aumentamos su raíz en el doble:
$\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 + 3\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 - 2\left(\dfrac{x}{2}\right) + 1 = 0$
$x^5 + 6x^4 - 32x + 32 = 0$

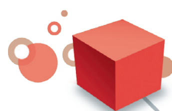
Disminuimos en una unidad su raíz:
$(x + 1)^5 + 6(x + 1)^4 - 32(x + 1) + 32 = 0$

Reduciendo: $x^5 + 11x^4 + 34x^3 + 46x^2 - 3x + 7 = 0$

Invertimos las raíces (intercambiamos los coeficientes de los términos equidistantes):
$7x^5 - 3x^4 + 46x^3 + 34x + 11x + 1 = 0$

Luego:
$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2a_i - 1} = -\dfrac{(-3)}{7} = \dfrac{3}{7}$

$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{3}{2a_i - 1} = 3\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2a_i - 1} = \dfrac{9}{7}$



UNIDAD 4

INECUACIONES

DESIGUALDAD

Es aquella operación que se establece entre dos números reales mediante los símbolos de desigualdad: $>$; $<$; $\geq$ o $\leq$

Un número **a** es positivo si $a > 0$ y negativo si $a < 0$.

Si el signo menos precede al símbolo para un número, tal como $-a$, el estudiante no puede asumir que dicho número es negativo.

Ejemplo:
Si $a = -9$, entonces $-a = 9$, donde $-\mathbf{a}$ es un número positivo

SISTEMA DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO EN FUNCIÓN DE DOS O MÁS INCÓGNITAS

Planteo de inecuaciones

El planteo de inecuaciones tiene similar procedimiento que el de las ecuaciones, la única diferencia es entender cuándo usar los símbolos: $>$; $<$; $\geq$ o $\leq$

Ejemplo:
Un distribuidor que disponía de cierta cantidad de euros (€) para comprar cierto número de autos con similares características todos ellos, pensaba comprarlos al precio de 40 mil € cada uno y le faltaba más de 20 mil €; después pensó comprarlos al precio de 30 mil € cada uno y le sobraban más de 400 mil €; por último los compró al precio de 20 mil € cada uno y le sobraron menos de 840 mil €. Determina el número de autos comprados.

Resolución:
Sea: **x** el número de autos comprados $\wedge$ **M** la cantidad de miles de euros (€) con los que cuenta.

Del enunciado:
Pensaba comprarlos al precio de 40 mil € c/u, y le faltaba más de 20 mil €.

- Pensaba comprarlos al precio de 40 mil € c/u → $40x$ (Para efectos prácticos consideramos la cantidad de miles de euros).
- y le faltaba más de 20 mil € → Si le faltaba es porque la inversión que pensaba hacer superaba a lo que tenía. $\Rightarrow 40x - M$. Esta diferencia es más de 20 mil €.

$\Rightarrow 40x - M > 20$ ...(1)

Su otra alternativa:
Pensó comprar al precio de 30 mil € c/u y le sobraba más de 400 mil €.

- Pensó comprar al precio de 30 mil € c/u → $30x$
- y le sobraba más de 400 mil € → Significa que la cantidad con la que cuenta supera a la inversión que pensaba hacer. $\Rightarrow M - 30x$. Esta diferencia es más de 400 mil €.

$\Rightarrow M - 30x > 400$ ...(2)

Y por último (ya los compra):
Los compra al precio de 20 mil € c/u y le sobraron menos de 840 mil €.

- Los compra al precio de 20 mil € c/u → $20x$
- y le sobraron menos de 840 mil € → Similar al caso anterior: $M - 20x$, pero esta diferencia es menos de 840 mil €.

$\Rightarrow M - 20x < 840$ ...(3)

Nota

- Se dice que dos números tienen el mismo signo ($ab > 0$) si ambos son positivos o ambos son negativos.

$$ab > 0 \iff ((a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0))$$

- Se dice que dos números tienen signo diferente ($ab < 0$) si uno es positivo y el otro es negativo.

$$ab < 0 \iff ((a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0))$$

Recuerda

Propiedades fundamentales de las desigualdades:

- $\forall a; b; c \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}^-$, se cumplen:

$$a > b \iff am < bm$$
$$c \leq b \leq a \iff cm \geq bm \geq am$$
$$a > b \iff \frac{a}{m} < \frac{b}{m}$$

$$\forall x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$$
$$\forall x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$$

$$a; b \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

- $\forall a; b \in \mathbb{R}^-$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

$$a > b \iff a^{2n} < b^{2n}$$

$$\text{Si: } f(x) \geq g(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \geq 0$$



- Sumando las inecuaciones (1) y (2): $10x > 420 \Rightarrow x > 42$ ...(4)
- Restando la inecuación (2) de (3): $10x < 440 \Rightarrow x < 44$ ...(5)
- De (4) y (5) afirmamos que: $42 < x < 44$
- El distribuidor compró: $x = 43$ autos

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Son aquellas inecuaciones que luego de ser reducidas adoptan algunas de las siguientes formas generales:

$ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$ $a \neq 0$ y $a; b; c \in \mathbb{R}$

Cuando: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

En este caso el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto (tcp).

Ejemplos:

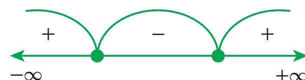
- $(3x - 2)^2 \geq 0$
  Si reemplazamos cualquier valor de x observaremos que se cumple la desigualdad.
  Si $x = \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \geq 0 \iff 0 > 0$ (F) $\vee$ $0 = 0$ (V)
  $\Rightarrow CS = \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}$
- $x^2 + 10x + 25 > 0 \iff (x + 5)^2 > 0$
  Si reemplazamos $x = -5$ obtenemos $0 > 0$ (F) por consiguiente la inecuación se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$, excepto cuando $x = -5$.
  $\Rightarrow CS = \mathbb{R} - \{-5\}$
- $x^2 - 2x + 1 < 0 \iff (x - 1)^2 < 0$
  Se sabe por la propiedad fundamental que un número elevado al cuadrado siempre es positivo o igual a cero. En este caso; ¿es incorrecto afirmar que un número positivo sea menor que cero? No, el símbolo hace que esta inecuación no se cumpla para algún valor real de x.
  $\Rightarrow CS = \varnothing$ (conjunto vacío).
- $(x + 9)^2 \leq 0 \iff (x + 9)^2 = 0$
  En este caso es correcto decir que existe solo una solución: $x = -9 \Rightarrow CS = \{-9\}$

Cuando: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Criterio de los puntos críticos
Este criterio se aplicará en una inecuación cuadrática cuando su discriminante sea positiva.

Realizamos el siguiente procedimiento:

I. En lo posible, que el primer coeficiente del trinomio sea positivo.
II. Factorizar el trinomio (aspa simple o fórmula general).
III. Los puntos críticos se determinan igualando cada factor a cero.
IV. Ubicar en forma ordenada los puntos críticos sobre la recta real.
V. Asignar signos (+) y (–), colocando el (+) primero desde la derecha hacia la izquierda en forma alternada.



VI. Si la inecuación tiene sentido ≥ o > a cero, la solución estará dada por la unión de los intervalos positivos.
VII. Si la inecuación tiene sentido ≤ o < a cero, la solución estará dada por la unión de los intervalos negativos.

Cuando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Teorema del trinomio positivo:

$ax^2 + bx + c > 0; \forall x \in \mathbb{R} \wedge a; b; c \in \mathbb{R}$ $\iff$ $a > 0 \wedge \Delta < 0$

Ejemplos:

- $7x^2 + 2x + 9 > 0$
  Su $CS = \mathbb{R} = \langle -\infty; +\infty \rangle$, ya que $a = 7 > 0$ y $b^2 - 4ac = 4 - 4(7)(9) = -248 < 0$
- $7x^2 + 2x + 9 < 0$
  Su $CS = \varnothing$; $a = 7 > 0$ y $\Delta = -248 < 0$
  El trinomio es positivo, pero no cumple con la relación: $0 < 7x^2 + 2x + 9 < 0$
  Por transitividad: $0 < 0$ (F)

Recuerda

- Solo se podrán restar desigualdades de sentidos contrarios y el sentido de la desigualdad resultante será la de aquella que hace de minuendo.

$$\begin{array}{c} a < b \\ c > d \\ \hline a - c < b - d \end{array}$$

- $\forall a; b; c; d \in \mathbb{R}$, se verifica:

$$\begin{array}{c} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array} \; (+)$$



Nota

$\forall a; b \in \mathbb{R} \wedge m \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$a > b \iff am > bm$



Observación

- La solución de una inecuación cuadrática depende exclusivamente de su coeficiente principal y de su discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$)
- La relación: ≥ (mayor o igual que) se define como:
  $a \geq b \iff a > b \vee a = b$
- La relación ≤ (menor o igual que) se define como:
  $a \leq b \iff a < b \vee a = b$

Es suficiente que se cumpla una de las relaciones de orden.



INECUACIONES RACIONALES (FRACCIONARIAS)

Son aquellas expresiones que luego de ser reducidas adoptan alguna de las siguientes formas:

$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$; $Q(x) \geq 1$

P(x) y Q(x) son polinomios.

Es necesario que tomes en cuenta que para la solución, cuando se factoriza Q(x) sus valores críticos en sus intervalos correspondientes siempre serán considerados como intervalos abiertos.

El método práctico a emplear es el de los puntos críticos.

Ejemplo: Segunda Prueba UNI 1999 - I (matemática)

Determina en qué conjunto de números negativos debe estar contenido x para que: $\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)} > 0$ esté bien definida.

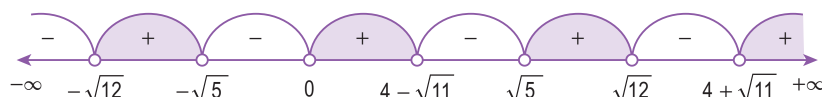
Resolución:

- Factorizando los polinomios numerador y denominador: $\frac{(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{x\left(x-(4-\sqrt{11})\right)\left(x-(4+\sqrt{11})\right)} > 0$
- Por el criterio de los puntos críticos:

$x + \sqrt{12} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{12}$
$x - \sqrt{12} = 0 \rightarrow x = \sqrt{12}$
$x + \sqrt{5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{5}$
$x - \sqrt{5} = 0 \rightarrow x = \sqrt{5}$

$x - (4 - \sqrt{11}) = 0 \rightarrow x = 4 - \sqrt{11} \approx 0{,}68$
$x - (4 + \sqrt{11}) = 0 \rightarrow x = 4 + \sqrt{11} \approx 7{,}32$
$x = 0$

- Ubicando en forma ordenada estos puntos críticos sobre la recta numérica real:



- El conjunto solución (CS) será: $CS = x \in \langle -\sqrt{12}; -\sqrt{5} \rangle \cup \langle 0; 4 - \sqrt{11} \rangle \cup \langle \sqrt{5}; \sqrt{12} \rangle \cup \langle 4 + \sqrt{11}; +\infty \rangle$
- Nos piden el conjunto de números negativos admisibles para x: $x \in \langle -\sqrt{12}; -\sqrt{5} \rangle$

Sistema de inecuaciones racionales (fraccionarias) de primer grado con una incógnita

El caso que se presenta es una forma general de desarrollo para las diferentes formas que adoptan las inecuaciones fraccionarias, veamos:

Ejemplo:
Enunciado del primer examen parcial CEPREUNI concurso 1999-1.

Sean $a; b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b$. Entonces el conjunto:

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{1+2b}{1+2a} < \frac{x+b}{x+a} < \frac{b}{a} \right\}$ ¿con qué intervalo coincide?

Resolución:

- Transformamos la expresión fraccionaria:

$\frac{x+b}{x+a} = \frac{x+a-a+b}{x+a} = \frac{x+a}{x+a} + \frac{b-a}{x+a}$

$= 1 + \frac{b-a}{x+a}$

- Reemplazando en la inecuación:

$\frac{1+2b}{1+2a} < 1 + \frac{b-a}{x+a} < \frac{b}{a}$

- Sumando **−1** a todos los miembros:

$\frac{1+2b}{1+2a} - 1 < 1 + \frac{b-a}{x+a} - 1 < \frac{b}{a} - 1$

$\frac{2b-2a}{1+2a} < \frac{b-a}{x+a} < \frac{b-a}{a}$

- Multiplicando por $\frac{1}{b-a}$ a los miembros de la inecuación.

$\frac{2(b-a)}{1+2a}\left(\frac{1}{b-a}\right) < \left(\frac{b-a}{x+a}\right)\left(\frac{1}{b-a}\right) < \left(\frac{b-a}{a}\right)\left(\frac{1}{b-a}\right)$

$\frac{2}{1+2a} < \frac{1}{x+a} < \frac{1}{a}$

- Invertimos:

$a < x + a < \frac{1+2a}{2}$

Recuerda

$a; b$ y $c \in \mathbb{R}$ se establece la transitividad:

Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
Si $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$



Observaciones

- Un teorema análogo del trinomio positivo será el siguiente:

$ax^2 + bx + c \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$
$a; b; c \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ $a > 0 \wedge \Delta \leq 0$

- Teorema del trinomio negativo:

$ax^2 + bx + c < 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$
$a; b; c \in \mathbb{R}$

$\Longleftrightarrow$ $a < 0 \wedge \Delta < 0$



Recuerda

$\forall a; b$ y $c \in \mathbb{R} / m \in \mathbb{R}^+$, se cumple:

$a > b \Longleftrightarrow a \pm m > b \pm m$
$c < b < a \Longleftrightarrow$
$c \pm m < b \pm m$
$< a \pm m$

Atención

- En este ejemplo la idea es encontrar el intervalo que afecta solo a la variable x.
- De la condición:
  $0 < a < b$
- Podemos establecer:
  $b - a > 0$ y como $(b - a)$ es positivo, al multiplicar a los miembros de la desigualdad por $\frac{1}{b-a} > 0$, el sentido no cambia.

- Sumamos $-\mathbf{a}$ a cada uno de los mienbros:

$$a - a < x + a - a < \frac{1+2a}{2} - a$$

$$0 < x < \frac{1}{2}$$

- Por consiguiente, el conjunto A coincide con:

$$A = \left\langle 0; \frac{1}{2} \right\rangle$$

Recuerda

La siguiente propiedad:
Si M y N tienen el mismo signo, se cumple:

$$M < x < N \Longleftrightarrow \frac{1}{N} < \frac{1}{x} < \frac{1}{M}$$



INECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas inecuaciones donde las variables o incógnitas de alguno de sus miembros están elevadas a exponentes fraccionarios o afectadas por radicales.

Ejemplos: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > 2 - x$ $\quad 0 \leq \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x+2}$ $\quad \frac{\sqrt{9-x^2}(x+1)}{x+3} > 0$

Para resolver este tipo de inecuaciones, se deben tener en cuenta el índice de los radicales.

Radicales con índice par

Para la resolución de estas inecuaciones, se deben establecer restricciones a la incógnita.

Conjunto de valores admisibles (CVA)

El conjunto de valores admisibles garantiza la existencia del valor de las variables para que una expresión matemática esté bien definida.

Realizamos los siguientes pasos:

- El radicando de una raíz de índice par debe ser mayor o igual a cero (CVA).
- Elevando a un exponente par eliminamos la raíz.

Ejemplos:

1. Determina el intervalo admisible de x: $\sqrt{8-x} < 7$

   Resolución:

   - El radicando debe ser cero o positivo: $\quad$ CVA: $8 - x \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 8$ $\quad$ (1)
   - Con esta restricción verificamos que: $\quad \underbrace{\sqrt{8-x}}_{+} < \underbrace{7}_{+}$
   - Elevando cada miembro al cuadrado, tenemos: $\quad 8 - x < 49 \Rightarrow x > -41$ $\quad$ (2)
   - Para encontrar el conjunto de valores reales que satisfagan las condiciones (1) y (2) debemos intersectar dichas relaciones:

   - Por lo tanto, téngase presente que CS ⊂ CVA $\quad$ $CS = x \in \langle -41; 8]$

Atención

Corolario:
El conjunto solución (CS) de la inecuación irracional, está incluido en el conjunto de valores admisibles (CVA).

CS = CVA



2. Determina el intervalo admisible de x: $\sqrt{x^2 - 9} \geq -6$

   Resolución:

   - Definimos el conjunto de valores admisibles: CVA: $x^2 - 9 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2 \geq 9$
   - Hacemos uso de la propiedad 2: $\quad x \leq -3 \vee x \geq 3$ $\quad$ (1)
   - Con esta restricción verificamos que: $\quad \underbrace{\sqrt{x^2-9}}_{+} \geq \underbrace{-6}_{-}$
   - Resulta una desigualdad que es correcta para todo $x \in \mathbb{R}$ que verifique la condición (1): $\quad$ CS = CVA

   - Por lo tanto: $\quad CS = x \in \langle -\infty; -3] \cup [3; +\infty\rangle$

   CVA: $x \in \left\langle -\infty; -\frac{9}{5} \right] \cup \left[0; +\infty \right\rangle$ $\quad$ (1)

Recuerda

Propiedades:

1. $\forall a; b \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{Z}^+$

   $a > b \Longleftrightarrow a^{2n} > b^{2n}$
   $a < b \Longleftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$

2. Si $B > 0$:

   $A^2 > B \Longleftrightarrow A < -\sqrt{B} \vee A > \sqrt{B}$

3. Si $B > 0$:

   $A^2 \leq B \Longleftrightarrow -\sqrt{B} \leq A \leq \sqrt{B}$



Problemas resueltos

X

1 Luego de resolver la inecuación:

$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$

indica su conjunto solución.

Resolución:

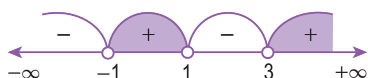
$$\frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+1}$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{x+1-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3-x}{(x-1)(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} > 0$$

Puntos de corte: $\{-1; 1; 3\}$

Graficando:



$x \in \langle -1; 1\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$

2 Si: $M = \left\{x \in \mathbb{Z} / \frac{x}{x+1} < \frac{12}{19} < \frac{x+1}{x+2}\right\}$

indica el cardinal de M.

Resolución:

$$\underbrace{\frac{x}{x+1} < \frac{12}{19}}_{\text{I}} \quad \overbrace{\frac{12}{19} < \frac{x+1}{x+2}}^{\text{II}}$$

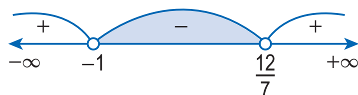
En (I):

$$\frac{x}{x+1} - \frac{12}{19} < 0$$

$$\frac{7x-12}{19(x+1)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7x-12}{x+1} < 0$$

$(7x-12)(x+1) < 0 \quad \wedge \quad x+1 \neq 0$

Puntos de corte: $\{-1; 12/7\}$; $x \neq -1$



$x \in \left\langle -1; \frac{12}{7}\right\rangle$ ...(S_1)

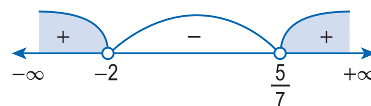
En (II):

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{12}{19} > 0$$

$$\frac{7x-5}{19(x+2)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7x-5}{x+2} > 0$$

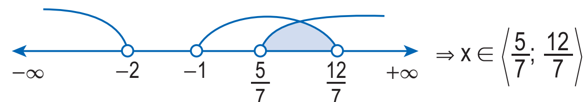
$(7x-5)(x+2) > 0 \quad \wedge \quad x+2 \neq 0$

Puntos de corte: $\{-2; 5/7\}$; $x \neq -2$



$x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup \left\langle \frac{5}{7}; +\infty\right\rangle$ ...(S_2)

$S_1 \cap S_2$:



$\Rightarrow x \in \left\langle \frac{5}{7}; \frac{12}{7}\right\rangle$

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow M = \{1\}$

Por lo tanto, M tiene 1 elemento.

3 Resuelve:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} > 0$$

Resolución:

Dada la inecuación:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} > 0$$

Se observa que:

$3x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$ ...(I)

$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$ ...(II)

Intersectamos (I) y (II):

$x \geq 2$ ...(S_1)

Resolviendo:

$$\sqrt{3x-1} > \sqrt{x-2}$$

$$3x - 1 > x - 2$$

$2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$ ... (S_2)

Luego:

$CS = S_1 \cap S_2 \quad \Rightarrow x \geq 2 \quad \therefore x \in [2; +\infty\rangle$

4 Calcula la suma de soluciones enteras positivas de la inecuación:

$$\sqrt{x^2 - 3x} > \sqrt{8-x}$$

Resolución:

De la inecuación: $\sqrt{x^2-3x} > \sqrt{8-x}$

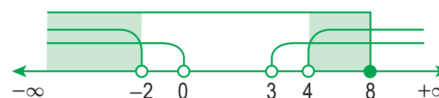
Observación:

$x^2 - 3x > 0 \wedge 8 - x \geq 0 \wedge x^2 - 3x > 8 - x$

$x(x-3) > 0 \wedge x \leq 8 \wedge x^2 - 2x - 8 > 0$

$x(x-3) > 0 \wedge x \leq 8 \wedge (x-4)(x+2) > 0$

Intersectando:



$x \in \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 4; 8]$

Nos piden:
$\sum$ soluciones $\mathbb{Z}^+ = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$

5 Resuelve:
$\frac{x+a}{x-a} > \frac{x+b}{x-b}$; con $-a > -b > 0$

Resolución:

$\frac{x+a}{x-a} - \frac{x+b}{x-b} > 0$; $(x \neq a \wedge x \neq b)$

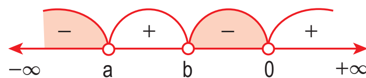
$\frac{(x+a)(x-b)-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x-b)} > 0$

$\frac{2(a-b)x}{(x-a)(x-b)} > 0$ ...(1)

Por condición tenemos:
$-a > -b > 0 \Rightarrow a < b < 0$
$a - b < 0$ ...(2)

Ahora, (2) en (1):
$\frac{x}{(x-a)(x-b)} < 0$

Gráficamente:



$CS = \langle -\infty; a\rangle \cup \langle b; 0\rangle$

6 Sea: $\{a; b\} \subset \mathbb{R}^+$, halla el menor valor de k de manera que:
$\frac{(a+b)^4}{a^4+b^4} \leq k - 1$

Resolución:
Se cumple:

$\frac{a+a+b+b}{4} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+a^4+b^4+b^4}{4}}$

$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}$

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \left(\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}\right)^4$

$\Rightarrow \frac{(a+b)^4}{a^4+b^4} \leq 8$ ...(1)

Además:
$\frac{(a+b)^4}{a^4+b^4} \leq k - 1$ ...(2)

De (1) y (2):
$(k-1)_{mín.} = 8$
$\therefore k_{mín.} = 9$

7 Halla la variación de: $\frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2}$
$x; y; z \in \mathbb{R}^+$

Resolución:
Haciendo:
$xy = a$; $yz = b$; $xz = c$

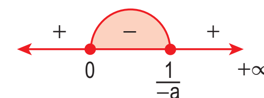
Reemplazando en la expresión:
$\frac{ac+ab+bc}{a^2+b^2+c^2}$; $a; b; c \in \mathbb{R}^2$

Por teorema, sabemos que:
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac > 0$
$\Rightarrow 0 < \frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2} \leq 1$
$\therefore \frac{xyz(x+y+z)}{x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2} \in \langle 0; 1]$

8 El conjunto:
$A = \{x \in \mathbb{R} / a < -4$ y $2 - ax > \sqrt{x + ax^2}\}$ es igual a:

Resolución:
Por dato: $a < -4$
Se tiene:
$2 - ax > \sqrt{x+ax^2} \Longleftrightarrow x + ax^2 \geq 0 \wedge 2 - ax > 0 \wedge$
$(2-ax)^2 > x + ax^2$

En: $x + ax^2 \geq 0$
$x(1+ax) \geq 0$
$x(-ax-1) \leq 0$; $(-a > 0)$



$\Rightarrow CS_1 = \left[0; \frac{1}{-a}\right]$

En: $2 - ax > 0 \Rightarrow 2 > ax$
Como $a < 0$, entonces: $\frac{2}{a} < x \Rightarrow CS_2 = \left\langle \frac{2}{a}; +\infty \right\rangle$

En:
$(2-ax)^2 > x + ax^2$
$4 - 4ax + a^2x^2 > x + ax^2$
$(a^2 - a)x^2 - (4a+1)x + 4 > 0$
$a(a-1)x^2 - (4a+1)x + 4 > 0$ ... (α)
Se tiene: $a < 0 \wedge (a-1) < 0 \Rightarrow a(a-1) > 0$
También: $\Delta = (-4a-1)^2 - 4a(a-1)(4)$
$\Delta = 16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 + 16a$
$\Delta = 24a + 1 < 0$

Luego, la desigualdad (α) se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$:
$\Rightarrow CS_3 = \mathbb{R}$

Finalmente:
$CS = CS_1 \cap CS_2 \cap CS_3$
$CS = \left[0; -\frac{1}{a}\right] \cap \left\langle \frac{2}{a}; +\infty \right\rangle \cap \mathbb{R}$ $\therefore CS = \left[0; -\frac{1}{a}\right]$

FUNCIONES

NOCIÓN DE FUNCIÓN

Una función es una dependencia o relación entre magnitudes.

Ejemplos:

– El número de pasos que damos depende de la distancia que queremos recorrer.

– Nuestras notas dependerán de las horas de estudio que dediquemos.

Definición de función

Una relación $f : A \to B$ será una función si cumple:

i) $f = \{(x; y) \in A \times B \,/\, y = f(x)\}$

ii) $\text{Si } (x; y) \in f \wedge (x; z) \in f \Rightarrow y = z$ ¡Para una primera componente existe solo una segunda componente!

Dominio de una función

Notación: Dom f ; Df

También llamado conjunto de preimágenes y está formado por las primeras componentes de los pares ordenados pertenecientes a la función.

En $(x; y) \in f$, siendo f una función, el dominio de f lo constituyen los valores que toma la variable independiente x .

Rango de una función

Notación: Ran f, Rf

Llamado también conjunto de imágenes y está dado por las segundas componentes de los pares ordenados pertenecientes a la función.

Si $(x; y) \in$ función f, el rango de f lo contituyen valores que toma la variable dependiente y.

Regla de correspondencia

Es la relación o vínculo que existe entre los elementos del dominio y el rango. Sea $f: A \to B$ entonces:

$y = f(x)$ x : variable independiente
y : variable dependiente

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Sea $f: A \to B$, diremos que f es una función real de variable real si A y B son subconjuntos de los números reales.

$A \subset \mathbb{R} \wedge B \subset \mathbb{R}$ también $f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = f(x)\}$

Gráfica de una función real de variable real

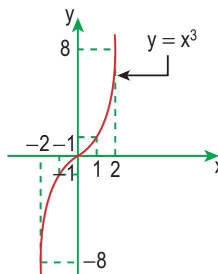
La gráfica de una función f es la representación geométrica de los pares ordenados que pertenecen a la función.
$\text{Gráf}(f) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = f(x) \,;\, x \in \text{Domf}\}$

Ejemplo:

$f(x) = x^3$
$\text{Domf} = \mathbb{R}$

Tabulando algunos valores:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	–8	–1	0	1	8	27



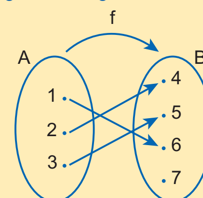


Recuerda

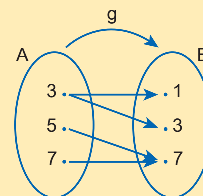
Relación de A en B es un subconjunto de A × B; es decir.

R es relación, si $R \subset A \times B$

$f: A \to B$ se lee:
función de A en B
Observa los siguientes diagramas sagitales:



f = {(1; 6), (2; 4), (3; 5)} es función.



g = {(3; 1), (3; 3), (5; 7), (7; 7)}
No es función, pero sí una relación.

Nota

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Atención

Sea la función real: y = f(x)
El Dominio de una función real f(x) estan formados por los valores que toma la variable independiente "x".
El Rango de una función real f(x) estan formados por los valores que toma la variable dependiente "y".



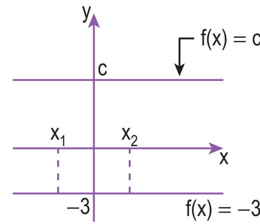
FUNCIONES ESPECIALES

Función constante

Regla de correspondencia:

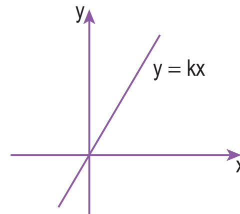
$f(x) = c$ o $y = c$

Dom f = $\mathbb{R}$
Ran f = {c}



Función de proporcionalidad

$y = kx$



Función identidad

Regla de correspondencia:

$f(x) = x$ o $y = x$

Dom f = $\mathbb{R}$
Ran f = $\mathbb{R}$

Ejemplo:
Grafica $f(x) = x; x \in \langle 2; 5]$

Función valor absoluto

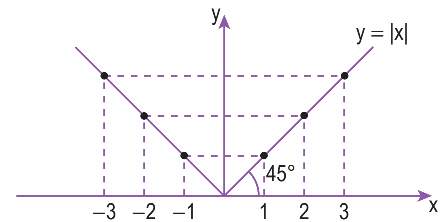
Regla de correspondencia:

$f(x) = |x|$ o $y = |x|$

Dom f = $\mathbb{R}$; Ran f = $[0; +\infty\rangle$
Graficamos: $y = |x|$

Tabulando:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	3	2	1	0	1	2	3	4

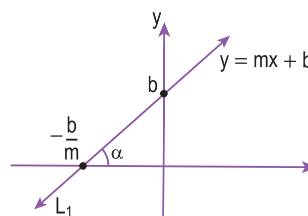


Función lineal o afin

Es una función de tipo polinomial cuya regla de correspondencia es:

$f(x) = mx + b; m \neq 0$ o $y = mx + b$

Dom (f) = $\mathbb{R}$; Ran (f) = $\mathbb{R}$
Supongamos que $m > 0 \wedge b > 0$



$\tan\alpha = m$

Donde **m** es la pendiente de la recta L_1.

Función cuadrática

Es una función polinomial de la forma: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$, Df = $\mathbb{R}$

La gráfica es una curva llamada parábola cuyo vértice (h; k) se determina:

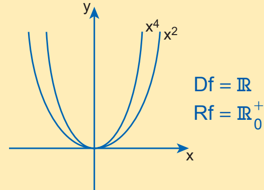
$$h = \frac{-b}{2a} \qquad k = f(h)$$



Observación

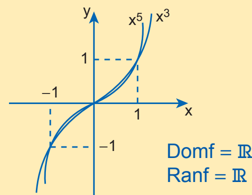
Función potencia
($n \in \mathbb{Z}^+$; $n \geq 2$)
$y = f(x) = x^n$

- Para **n** par



Df = $\mathbb{R}$
Rf = $\mathbb{R}_0^+$

- Para **n** impar



Domf = $\mathbb{R}$
Ranf = $\mathbb{R}$

Nota

Para hallar los interceptos en una función lineal se evalua

$f(0)$ y $f(x) = 0$

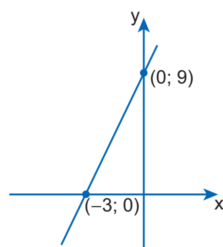
y se unen los puntos con una recta.

$x = 0 \Rightarrow$ se halla y; punto (0, y)
$y = 0 \Rightarrow$ se halla x; punto (x , 0)

Ejemplo:
Determina la gráfica de:
$f(x) = 3x + 9$

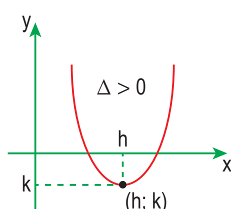
$\Rightarrow f(0) = 3(0) + 9 = 9$
punto (0; 9)

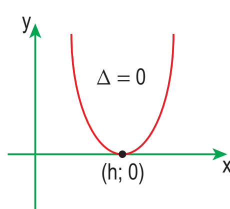
$\Rightarrow f(x) = 0 = 3x + 9$
$x = -3$
punto (–3; 0)

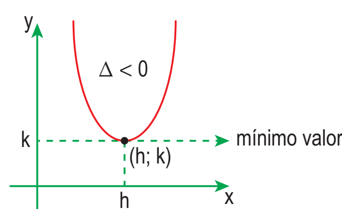




Caso I: Si $a > 0$ (la parábola es cóncava hacia arriba)





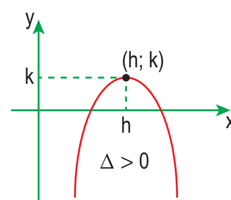


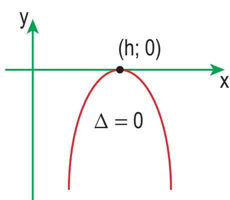
Recordar

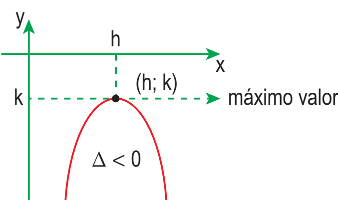
En una función cuadrática:
$ax^2 + bx + c$
Δ = discriminante = $b^2 - 4ac$



Caso II: Si $a < 0$ (la parábola es cóncava hacia abajo)







Observa

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$
Si $a > 0$; la parábola o f(x) tiene un mínimo valor en h.

Si $a < 0$; la parábola o f(x) tiene un máximo valor en h.

Ejemplo:
Grafica: $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$

Resolución:
Método I: $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ (a = 2, b = −4, c = 6)

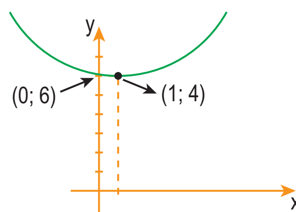
$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} = 1$$

$$k = f(h) = f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 6$$

$$k = 4 \Rightarrow \text{vértice } (1; 4)$$

- Como a >0, se abre hacia arriba.
- Intercepto con el eje **y**:
  $\Rightarrow f(0) = 2(0)^2 - 4(0) + 6 = 6$ punto (0; 6)

Graficamos:



Por ambos métodos el:
- vértice es (1; 4) y
- un punto (0; 6)
- $a > 0$

Nota

$y = ax^2 + bx + c$ tambien se puede expresar asi:

$$y - k = a(x - h)^2$$

(al completar cuadrados)

Donde $a > 0 \Rightarrow \cup$
$a < 0 \Rightarrow \cap$

y (b, k): es el vértice de dicha parábola.

Función par

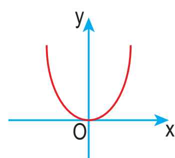
Una función f es par si cumple:

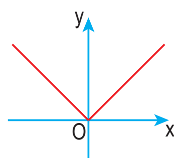
I. Si $x \in \text{Dom } f \Rightarrow -x \in \text{Dom} f$
II. $f(-x) = f(x)$

Ejemplos:

$y = x^2$
- $y = (-x)^2 = x^2$

$y = |x|$
- $y = |-x| = |x|$





* Sus gráficas son simétricas respecto del eje y.

Función impar

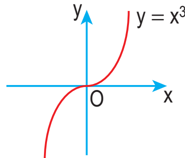
Una función f es impar si cumple:

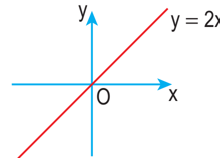
I. Si $x \in \text{Dom } f \Rightarrow -x \in \text{Dom} f$.
II. $f(-x) = -f(x)$

Ejemplos:

$y = x^3$
- $y = (-x)^3 = -x^3$

$y = 2x$
- $y = 2(-x) = -2x$





* Sus gráficas son simétricas respecto del origen.

Nota

Método II: $y = 2x^2 - 4x + 6$
$y = 2(x^2 - 2x) + 6$
x^2 debe tener coeficiente (1)
$y = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 6$
(se agrega y quita la mitad del coeficiente de x al cuadrado): $\left(\frac{2}{2}\right)^2$

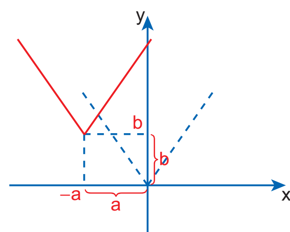
$\Rightarrow y = 2(x - 1)^2 - 2 + 6$
$y - 4 = 2(x - 1)^2$ (k = 4, h = 1)
$\Rightarrow$ vértice (h, k) = (1; 4)

Veamos si tiene intercepto en el eje y
$\Rightarrow f(0) = 2(0)^2 - 4(0) + 6$
$f(0) = 6$

Nota

Si $f(x) = |x|$
$\Rightarrow f(x + a) + b = |x + a| + b$

$a; b > 0$

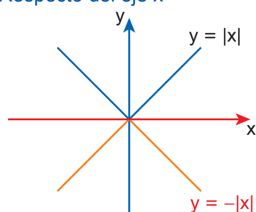


f(x) sufre desplazamiento horizontal y vertical.

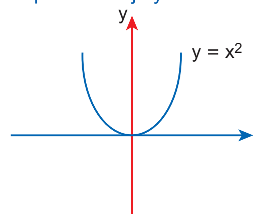
Veamos:

Simetrías

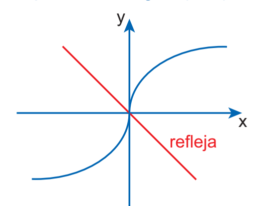
Respecto del eje x



Respecto del eje y



Respecto del origen (0; 0)





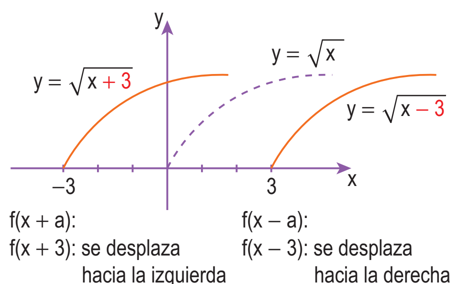
Desplazamiento de gráficas

Sea una función $f(x) \Rightarrow f(x \pm a)$

Se deplaza en el eje x.

Desplazamiento horizontal.

Si $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(x \pm 3)$



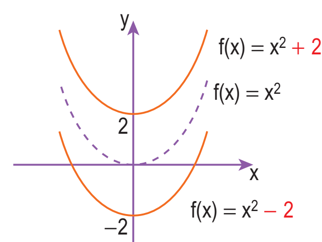
$f(x + a)$:
$f(x + 3)$: se desplaza hacia la izquierda

$f(x – a)$:
$f(x – 3)$: se desplaza hacia la derecha

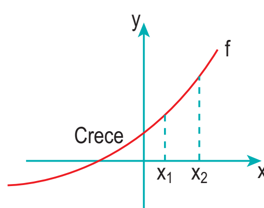
$f(x) \pm a$ se desplaza en el eje y.

Desplazamiento vertical.

$f(x) = x^2 \Rightarrow f(x) \pm 2$



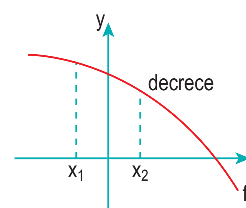
Crecimiento y decrecimiento de una función



Crece

Función creciente

Si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

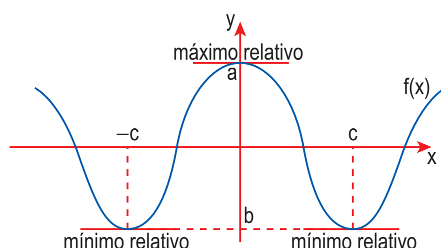


Decrece

Función decreciente

Si: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Máximos y mínimos relativos



La función f(x):

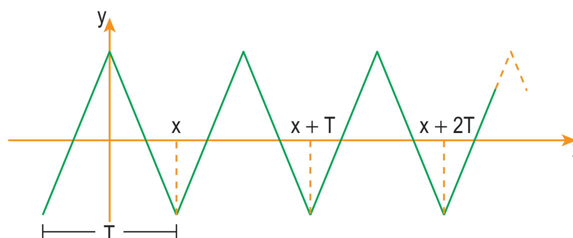
- Tiene un máximo relativo si la función pasa de creciente a decreciente.
- Tiene un mínimo relativo si la función pasa de decreciente o creciente.

Máximo relativo: (0; a)

Mínimo relativo: (–c; b) y (c; b)

Periodicidad

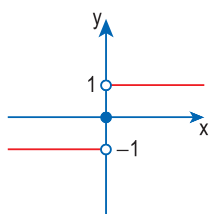
Una función **f** es periódica, si $\forall\ T \neq 0$ se cumple que: $f(x + T) = f(x)$



$F(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + nT)$ ... $n \in \mathbb{Z}$

Función signo

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$$

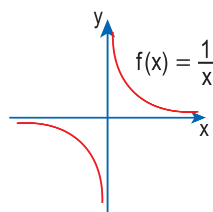


Dom f = $\mathbb{R} \wedge$ Ran f = {– 1; 0; 1}

Función inverso multiplicativo

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

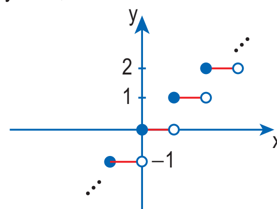
Dom f = $\mathbb{R}$ – {0}
Ran f = $\mathbb{R}$ – {0}



Función máximo entero

$$f(x) = [\![x]\!] = \begin{cases} \vdots \\ -1; & -1 \leq x < 0 \\ 0; & 0 \leq x < 1 \\ 1; & 1 \leq x < 2 \\ 2; & 2 \leq x < 3 \\ \vdots \end{cases}$$

Dom y = $\mathbb{R}$
Ran y = n ; n $\in \mathbb{Z}$



Propiedades:

- $[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$
- $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$
- $[\![x + k]\!] = [\![x]\!] + k; k \in \mathbb{Z}$
- $[\![x]\!] \leq n \Leftrightarrow x < n + 1$
- $[\![x]\!] \geq n \Leftrightarrow x \geq n$
- $[\![x]\!] < n \Leftrightarrow x < n$
- $[\![x]\!] > n \Leftrightarrow x \geq n + 1$

Operaciones con funciones

Sean F y G dos funciones tales que Dom F $\cap$ Dom G $\neq \varnothing$, se definen las siguientes operaciones:

- **Suma de funciones**
  (F + G)(x) = F(x) + G(x) ; Dom (F + G) = Dom F $\cap$ Dom G
- **Diferencia de funciones**
  (F – G)(x) = F(x) – G(x) ; Dom (F – G) = DomF $\cap$ Dom G
- **Producto de funciones**
  (FG)(x) = F(x) . G(x) ; Dom (FG) = Dom F $\cap$ Dom G
- **División de funciones**
  (F/B)(x) = F(x) / G(x) ; Dom (F/G) = Dom F $\cap$ Dom G – {x/ G(x) = 0}

Ejemplo:
Dadas las funciones F y G determina: F + G; F – G; FG y F/G
F= {(4; 2), (3; –1), (5; 7), (6; 1)} $\Rightarrow$ Dom F = {4; 3; 5; 6}
G= {(4; 5), (2; 6); (6; 0), (9; –2)} $\Rightarrow$ Dom G = {4; 2; 6; 9}

Luego: Dom F $\cap$ Dom G = {4; 6}
$\Rightarrow$ F + G = {(4; F(4) + G(4)), (6; F(6) + G(6))} = {(4; 7), (6; 1)}
$\Rightarrow$ F – G = {(4; F(4) – G(4) , (6; F(6) – G(6))} = {(4; –3), (6; 1)}
$\Rightarrow$ FG = {(4; F(4) . G(4)), (6; F(6) . G(6))} = {(4; 10), (6; 0)}

$$\Rightarrow F/G \Rightarrow Dom\left(\frac{F}{G}\right) = \underbrace{\underbrace{\{DomF \cap Dom\ G}_{\{4;\ 6\}} - \underbrace{\{x/\ G(x) = 0\}}_{\{6\}}}_{\{4\}}$$

$$\Rightarrow F/G = \left\{\left(4; \frac{F(4)}{G(4)}\right)\right\} = \{(4; 2/5)\}$$

Composición de funciones (f ∘ g)

Sean **f** y **g** dos funciones; se defina la función f ∘ g (f compuesto con g) como:
f ∘ g(x) = f(g(x)) = {x, f(g(x))}
Dominio de f ∘ g = {x/x $\in$ Domg $\wedge$ g(x) $\in$ Dom f}

Ejemplos:

1. Sean las funciones: f = {(3; 7), (–5; 8) , (4; 2), (–3; 7), (6; 1)}
   g = {(7; 6), (8; –4), (9; 3), (13; –5)}

   Determina: f ∘ g

Atención

Igualdad de funciones
Dos funciones F y G son iguales si cumplen las condiciones:

I. Dom F = Dom G
II. F(x) = G(x) ; $\forall$ x $\in$ DomF = DomG

Ejemplo:
$F(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^3}$ y

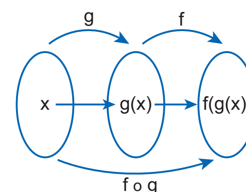
$G(x) = \frac{1}{x-1}$

Son iguales



Nota

g ∘ f = g(f(x))
Dom(f ∘ g) = {x $\in \mathbb{R}$/x $\in$ Dom f $\wedge$ f(x) $\in$ Dom g}
$\exists$ f ∘ g $\Leftrightarrow$ Rang $\cap$ Dom f $\neq \varnothing$
f ∘ g $\neq$ g ∘ f



Observa que:
Si (a; b) $\in$ g $\wedge$ (b; c) $\in$ f
$\Rightarrow$ (a; c) $\in$ f ∘ g

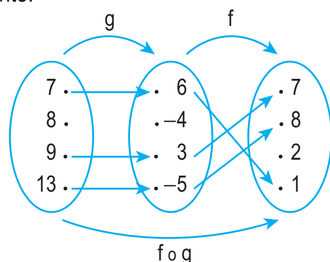
También se cumple:
Si (m ; n) $\in$ f $\wedge$ (n; b) $\in$ g
$\Rightarrow$ (m ; b) $\in$ g ∘ f

Resolución:
Primero hallamos Dom (f ∘ g) = {x /x ∈ Dom g ∧ g(x) ∈ Dom f}

g(7) = 6 ✓
g(8) = –4 ∉ Dom f
g(9) = 3 ✓
g(13) = –5 ✓

⇒ Dom (f ∘ g) = {7; 9; 13}
f ∘ g = {(x, f(9(x))} = {(7; f(g(7)), (9; f(g(9)), (13; f(g(13))} = {(7, f(6)), (9; f(3)), (13; f(–5))}
f ∘ g = {(7; 1), (9; 7), (13; 8)}

Gráficamente:



Se observan los elementos que llegan de g a f.
7 ⇒ 1
9 ⇒ 7 ⇒ f ∘ g = {(7; 1), (9; 7), (13, 8)}
13 ⇒ 8

2. Determina la regla de correspondencia de f ∘ g.
Sabiendo que $f(x) = x^2 + 1$ y g (x) = 3x + 2.

Resolución:
$(f \circ g)x = f(g(x)) = f(3x + 2) = (3x + 2)^2 + 1 = 9x^2 + 12x + 5 \Rightarrow f \circ g(x) = 9x^2 + 12x + 5$

Propiedades: Sean **f**, **g**, **h** funciones.
* (f ∘ g) ∘ h = f ∘ (g ∘ h) = f(g (h(x)) → Asociativa
* (f+g) ∘ h = (f ∘ h) + (g ∘ h) → Distributiva
* (f . g) ∘ h = (f ∘ h) . (g ∘ h)

FUNCIONES INYECTIVA, SURYECTIVA Y BIYECTIVA

Función inyectiva o univalente

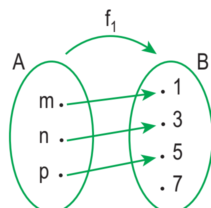
La función f: A → B (función de A en B) será inyectiva si a elementos distintos del dominio les corresponden distintas imágenes, es decir, para cada elemento del rango existe un único valor del dominio.

Se cumple:

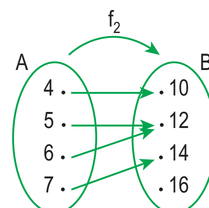
Si $x_1, x_2 \in$ Dom f: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Ejemplos:

1.



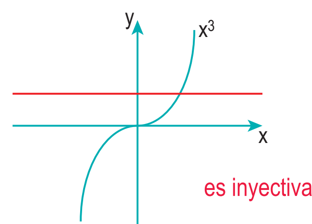
Es inyectiva



No es inyectiva
f(5) = 12
f(6) = 12
5 ≠ 6

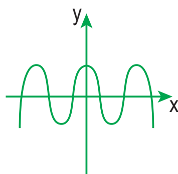
2. • $y = x^3$; ∀ x ∈ ℝ
⇒ Evaluamos: $f(x_1) = f(x_2)$
$x_1^3 = x_2^3$
$\sqrt[3]{x_1^3} = \sqrt[3]{x_2^3}$ $x_1 = x_2$ ⇒ es inyectiva

Gráficamente:

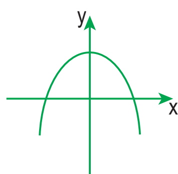


Nota

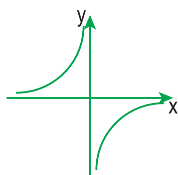
Continuidad y discontinuidad
Una función es continua si en su gráfica no existen saltos ni interrupciones.



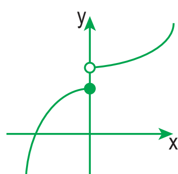
Continua



continua



discontinua



discontinua





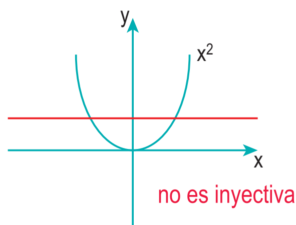
- $y = x_2$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow$ Evaluamos: $f(x_1) = f(x_2)$

  $x_1^2 = x_2^2$

  $x_1 = \pm\, x_2$ no es inyectiva

Gráficamente:



Observación

Cualquier recta horizontal (paralela al eje x) que corta a f(x) en un solo punto es inyectiva. Siendo f(x) una función cualquiera.

Función suryectiva a sobreyectiva

Una función f: $A \to B$ es suryectiva si su rango coincide con el conjunto de llegada. Es decir, rango de f = B

Ejemplo:

Sean los conjuntos: $M = \{1, 5, 7\}$
$N = \{3, 7, 9\}$

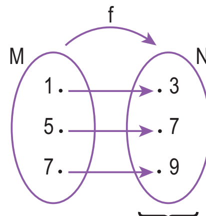
Si f: $M \to N$, tal que $f = \{(x, y) \in M \times N \,/\, y = x + 2\}$, demostrar que f es suryectiva.

$\Rightarrow x \in \{1; 5; 7\} \quad y = x + 2 \in \{3; 7; 9\}$

$\Rightarrow f = \{(1; 3), (5; 7), (7; 9)\}$

Como **N** coincide con el Ranf = {3; 7; 9} $\Rightarrow$ es suryectiva.

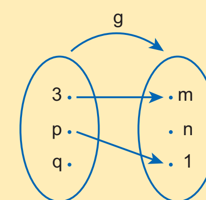
Gráficamente:



Rango coincide con el conjunto de llegada.

Atención

Observa que la función:



$\Rightarrow$ g es suryectiva.

Función biyectiva

Una función **f** es biyectiva cuando esta es inyectiva y suryectiva a la vez.

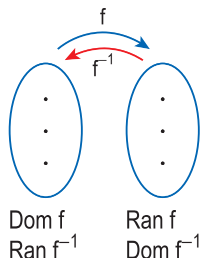
$f(x) = x^2$; $x \in [0; +\infty\rangle$ es biyectiva.

Función Inversa (f^{-1} o f*)

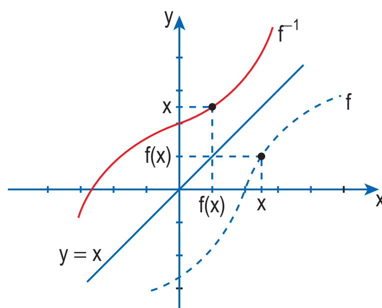
Sea f una función univalente f: $A \to B$; la función inversa queda definida $f^{-1}: B \to A$.

Es equivalente a: $f = \{(x; f(x)) \,/\, x \in \text{Dom } f\} \Rightarrow f^{-1} = \{(f(x); x) \,/\, x \in \text{Dom } f\}$

Gráficamente:



$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$



f^{-1} se refleja en la función identidad y = x.

Observa:

Sea f una función inyectiva y suryectiva con regla de correspondencia y = f(x).
Para hallar f^{-1} se despeja x en función de y, donde:

x de f(x) viene a ser **y** de $f^{-1}(x)$

y de f(x) viene a ser **x** de $f^{-1}(x)$

Ejemplo: Halla f^{-1}, si existe en: $f = \dfrac{x+2}{3}$

Resolución:

- Primero veamos si es inyectiva, ello implica que:

  Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

  Evaluando en f: $\dfrac{x_1 + 2}{3} = \dfrac{x_2 + 2}{3}$

  $x_1 = x_2 \Rightarrow$ f es inyectiva, y f^{-1} existe.

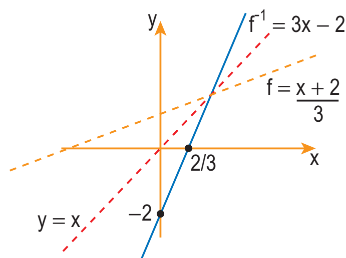
- Despejamos **x** es función de **y**.

  $y = \dfrac{x+2}{3} \Rightarrow 3y = x + 2$

  $x = 3y - 2$

  $f^{-1}(x) = 3x - 2$

- Cuya gráfica es:



Propiedades:

$\text{Dom} f^{-1} = \text{Ran } f$

$\text{Ran} f^{-1} = \text{Dom } f$

$f^{-1} \circ f = I$, I función identidad

$f \circ f^{-1} = I$

$(f^{-1})^{-1} = f$

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$



Nota

La inversa de f se denota por f^{-1} o f*.

Problemas resueltos

1 Halla Dom(f) – Ran(f), si f es una función:
$f = \{(a + 1; 3), (a - 3; b - 1), (a + b; 7), \left(\frac{1}{\sqrt{a-3}}; \frac{1}{\sqrt{5-a}}\right), (4; 0)\}$
donde $a \in \mathbb{Z}$.

Resolución:

De $\sqrt{a-3}$ y $\sqrt{5-a}$, se tiene:
$3 < a < 5$ $(a \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = 4$

Reemplazando a = 4 se tiene:
$f = \{(5; 3), (1; b - 1), (4 + b; 7), (1; 1), (4; 0)\}$
$\Rightarrow b - 1 = 1$
$b = 2$
$\Rightarrow f = \{(5; 3), (1; 1), (6; 7), (4; 0)\}$
$Dom(f) = \{1; 4; 5; 6\}$
$Ran(f) = \{0; 1; 3; 7\}$
$\therefore Dom(f) - Ran(f) = \{4; 5; 6\}$

2 Sea: $F(x) = -x^2 - 4x + 5;\ -1 \leq x \leq 3$
Donde: Ran(F) = [a; b]
Calcula: a + b

Resolución:

Dada la función:
$F(x) = -x^2 - 4x + 5$

Además:
$-1 \leq x \leq 3$

Sumamos 2:
$1 \leq x + 2 \leq 5$

Elevamos al cuadrado:
$1 \leq x^2 + 4x + 4 \leq 25$

Restamos 4:
$-3 \leq x^2 + 4x \leq 21$

Multiplicamos por (–1):
$3 \geq -x^2 - 4x \geq -21$

Sumamos 5:
$8 \geq -x^2 - 4x + 5 \geq -16$

$Ran(F) = [-16; 8] = [a; b]$
$\Rightarrow a = -16 \wedge b = 8$

Nos piden:
$a + b = -16 + 8 = -8$

3 Determina el dominio de F:
$$F(x) = \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}}{2x - 10}$$

Resolución:

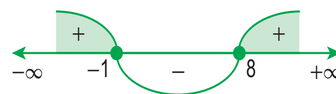
Dada la función:
$$F(x) = \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}}{2x - 10}$$

Se observa que:
$x - 3 \geq 0 \wedge 8 - x \geq 0 \wedge\ 2x - 10 \neq 0$
$x \geq 3 \wedge x \leq 8 \wedge x \neq 5$
$\therefore Dom(F) = [3; 5\rangle \cup \langle 5; 8]$

4 Halla el dominio de:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x - 8}}$$

Resolución:

$x^2 - 7x - 8 > 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 1) > 0$



$\therefore Dom(f) = \mathbb{R} - [-1; 8]$

5 Si:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x+2};\ x > 2 \\ x^2 - 1;\ -1 \leq x \leq 2 \\ x - 3;\ x < -1 \end{cases}$$
Calcula: $f(f(0)) + f(f(2)) + f(-3)$

Resolución:

$f(0) = (0)^2 - 1 = -1 \Rightarrow f(f(0)) = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$

$f(2) = (2)^2 - 1 = 3 \Rightarrow f(f(2)) = f(3) = \dfrac{3(3) + 1}{3 + 2} = 2$

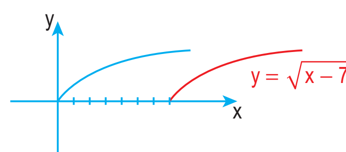
$f(-3) = -3 - 3 = -6$

$\therefore f(f(0)) + f(f(2)) + f(-3) = -4$

6 Grafica:
a) $y = \sqrt{x - 7}$ b) $y = |2x + 3|$
c) $y = 2x^2 + 12x + 18$ d) $\sqrt{-x}$

Resolución:

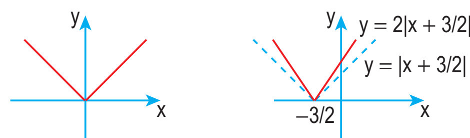
a) Sabemos que $y = \sqrt{x}$



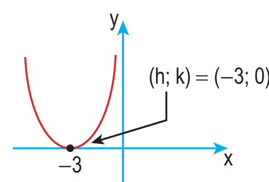
F(x – 7): Se desplaza 7 unidades a la derecha.

b) Partimos de $y = |x|$

$\Rightarrow y = |2x + 3| = 2|x + \frac{3}{2}|$



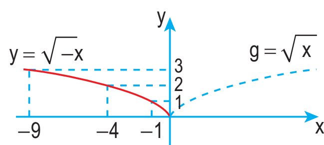
c) $y = 2(x^2 + 6x + 9)$
$y = 2(x + 3)^2$
(La ecuación cuadrática es una parábola):
$y - 0 = 2(x - (-3))^2$
$a > 0 \wedge (h, k) = (-3; 0)$



d) Restringimos:
$-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

Tabulamos:

x	–1	–4	–9
y	1	2	3



Observamos que $y = \sqrt{-x}$ es el reflejo de $g = \sqrt{x}$ en el eje y.

7 Se tienen las siguientes funciones:
$f = \{(3; -7), (4; 8), (5; 6), (-3; 2), (-1; 3)\}$
$g(x) = |x - 2|; x \in [2, +\infty\rangle$
Determina: a) f + g b) f – g c) f . g d) f/g

Resolución:

Como f y g realizan las operaciones, intersecamos sus dominios:
Dom f ∩ Dom g

$\underbrace{\{3; 4; 5; -3; -1\} \cap x \geq 2}_{\{3, 4, 5\}}$

$\Rightarrow$ a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \{(3, f(3) + g(3), (4, f(4) + g(4), (5; f(5) + g(5))\}$

$f(x) + g(x) = \{(3; -6), (4; 10); (5; 9)\}$

$\Rightarrow$ b) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \{(3; f(3) -9(3)), (4; f(4) - g(4)), (5; f(5) - g(5))\}$

$f(x) - g(x) = \{(3; -8), (4;6), (5; 3)\}$

$\Rightarrow$ c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \{3; f(3) \cdot g(3)), (4; f(4) \cdot g(4)), (5; f(5). g(5)\}$

$f(x) \cdot g(x) = \{(3; -7), (4; 16), (5; 18)\}$

$\Rightarrow$ d) $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{\left(3; \frac{f(3)}{g(3)}\right), \left(4; \frac{f(4)}{g(4)}\right), \left(5; \frac{f(5)}{g(5)}\right)\right\}$

$g(x) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \{(3; -7), (4; 4), (5; 2)\}$

8 Halla la regla de correspondencia de:

a) $f^*(x)$, si $f(x) = \frac{2x+3}{4x-1}$

b) $g \circ f(x)$, si $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2 + 3x - 2$

c) $g(x)$, si $f \circ g(x) = 4x^2 + 5$ y $f(x) = x - 1$

d) $g \circ g^{-1}(x)$, si $g(x) = \frac{x-3}{x+2}$

Resolución:

a) $y = \frac{2x+3}{4x-1}$

Despejamos x en función de y:

$4xy - y = 2x + 3$

$4xy - 2x = y + 3$

$x(4y - 2) = y + 3$

$x = \frac{y+3}{4y-2}$

$\Rightarrow f^*(x) = \frac{x+3}{4x-2}$

b) $g \circ f(x) = g(f(x))$

Evaluamos f(x) en g(x):

$g(f(x)) = (x-3)^2 + 3(x-3) - 2$

$g(f(x)) = x^2 - 6x + 9 + 3x - 9 - 2$

$g(f(x)) = x^2 - 6x - 2$

$\Rightarrow g \circ f(x) = x^2 - 3x - 2$

c) $\underbrace{f(g(x))}_{\text{en } f(x)} = 4x^2 + 5$

$g(x) - 1 = 4x^2 + 5$

$\Rightarrow g(x) = 4x^2 + 6$

d) $g \circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x))$

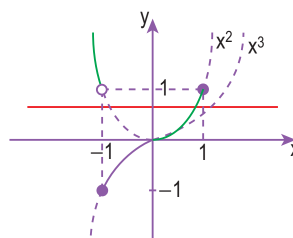
Propiedad:

$g \circ g^{-1}(x) = x$

9 Demuestra que: $G(x) = \begin{cases} x^2; x < -1 \\ x^3; -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ es inyectiva.

Resolución:

Graficamos:



Cualquier recta horizontal corta a la gráfica en un solo punto.

10 Sean las funciones: $F(x) = \frac{4}{x-2}; x \in [0, 3] - \{2\}$

$G(x) = \begin{cases} (x-1)^2; & 1 \leq x \leq 6 \\ x + 2; & -7 \leq x < 1 \end{cases}$

Halla: $(F^* \circ G)(4)$

Resolución:

Primero veamos si existe F*:

$F(x_1) = F(x_2)$

$\frac{4}{x_1 - 2} = \frac{4}{x_2 - 2} \Rightarrow x_1 = x_2$; es inyectiva

$\Rightarrow$ Existe F*

Hallamos F*: $y = \frac{4}{x-2}$

$x = \frac{4+2y}{y}$ $\therefore$ $F^*(x) = \frac{4+2x}{x}$

Piden $F^*(G(4))$ $G(4) = (4-1)^2 = 3^2 = 9$

$\Rightarrow F^*(9) = \frac{4+2(9)}{9} = \frac{-22}{9}$

LÍMITES

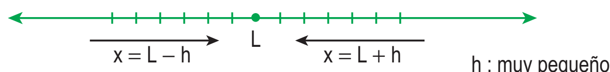
Nota

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Significa que x toma valores muy próximos a él, pero sin llegar a tomarlo, y f(x) evaluado en x_0 tiende al valor de L.

NOCIÓN DE LÍMITE

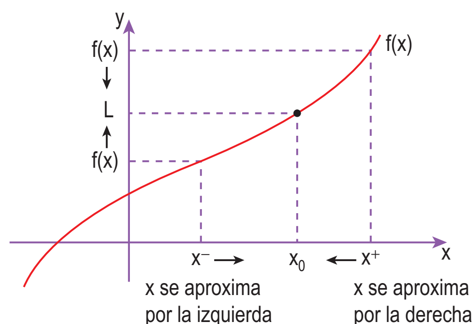
Se dice que un número x tiene un límite L cuando x toma valores muy cercanos a L.



h : muy pequeño

Interpretación geométrica

Dada una función f(x); el límite de f(x) cuando x tiende a x_0:



- De la gráfica cuando x se aproxima a x_0 f(x) se aproxima a L.
- Cuando x es muy próximo a x_0; f(x) es L.

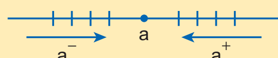
Notación:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Observación

$x \to a^+$: significa que x tiende al valor de a por la derecha.

$x \to a^-$: significa que x tiende al valor de a por la izquierda.



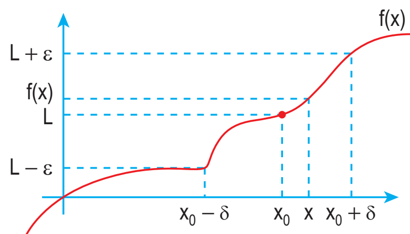


DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

Dada una función f, decimos que el límite de la función f en el punto x_0 es el número real L, si y solo sí:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in \text{Dom } f \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

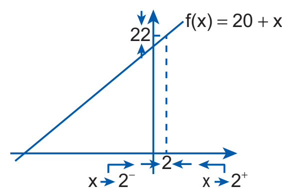
Interpretación geométrica



- Las letras griegas ε y δ se llaman épsilon y delta, respectivamente.
- El punto x_0 puede estar o no en el dominio de f.

Nota

Ejemplo:
Sea la función f(x) = 20 + x
Queremos averiguar a qué valor tiende f(x) cuando x se aproxima a 2 $(x \to 2)$.



Se observa que:
Cuando x se va aproximando tanto por la derecha como por la izquierda.
Las imágenes (f(x)) se aproxima al valor 22 (tanto por arriba como por abajo).

Se denota asi:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 22$$

límite de f(x) cuando x se aproxima a 2.

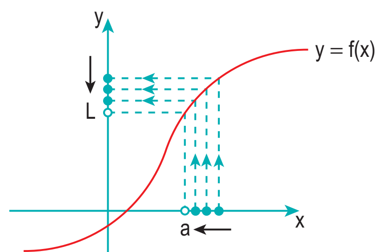
Límites laterales

Límite por la derecha

Sea la función f: $\langle a; +\infty \rangle \to \mathbb{R}$

El límite de la función f(x) cuando x se aproxima hacia a por la derecha (x > a) es el número real L al cual denotaremos por: $x \to a^+$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$



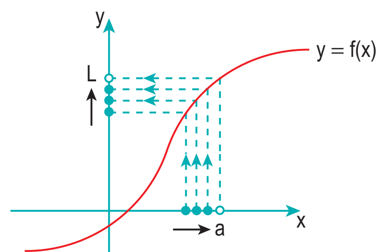
Valores de x cercanos, pero mayores al valor de "a".

Límite por la izquierda

Sea la función f: $\langle -\infty; a \rangle \to \mathbb{R}$

El límite de la función f(x) cuando x se aproxima hacia a por la izquierda (x < a) es el número real L denotamos por: $x \to a^-$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L$$



Valores de x cercanos, pero menores al valor de "a".



Teorema

El $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe si y solo sí existen los límites laterales y estos son iguales.

Es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Teorema de la unicidad del límite

Si el límite de una función existe, es único.

Es decir:

$$\text{Si: } \lim_{x \to a} f(x) = L_1 \wedge \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \Rightarrow L_1 = L_2$$

Ejemplo:

Determina si existen los límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3; x > 2 \\ 9 - x; x < 2 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1; x > -1 \\ x - 2; x \leq -1 \end{cases}$

Resolución:

- Usamos límites laterales.

  Para que exista el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

  $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 3) = 7;\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (9 - x) = 7$

  Como los límites laterales son iguales:

  $\therefore \exists$ límite.

- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 + 1) = 2;\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x - 2) = -3$

  Los límites laterales son diferentes:

  $\therefore \nexists$ límite.

Teoremas fundamentales

Sean las funciones F(x) y G(x) funciones reales de variable real y x_0, arbitrario, no necesariamente $x_0 \in \underbrace{\text{Dom} F \cap \text{Dom}\, G}_{\neq \varnothing}$.

Además: $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L_1$; $\lim\limits_{x \to x_0} G(x) = L_2$

• $\lim\limits_{x \to x_0} F^n(x) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} F(x)\right)^n = (L_1)^n$; $n \in \mathbb{Z}^+$	• $\lim\limits_{x \to x_0} (F - G)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} F(x) - \lim\limits_{x \to x_0} G(x) = L_1 - L_2$
• $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{F(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to x_0} F(x)} = \sqrt[n]{L_1}$; $n \geq 2; n \in \mathbb{Z}^+$	• $\lim\limits_{x \to x_0} (F.G)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} F(x) . \lim\limits_{x \to x_0} G(x) = L_1.L_2$
• $\lim\limits_{x \to x_0} b^{F(x)} = b^{\lim\limits_{x \to x_0} F(x)} = b^{L_1}$; $b > 0 \wedge b \neq 1$	• $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{F}{G}\right)_x = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} F(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} G(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$; $L_2 \neq 0$
• $\lim\limits_{x \to x_0} (F + G)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} F(x) + \lim\limits_{x \to x_0} G(x) = L_1 + L_2$	• $\lim\limits_{x \to x_0} \left[F(x)^{G(x)}\right] = \left(\lim\limits_{x \to x_0} F(x)\right)^{\lim\limits_{x \to x_0} G(x)} = L_1^{L_2}$

Teorema del Sandwich

Sean F, G y H tres funciones reales de variable real y además; $\text{Dom } F \cap \text{Dom } G \cap \text{Dom } H \neq \varnothing$

Si se cumple:

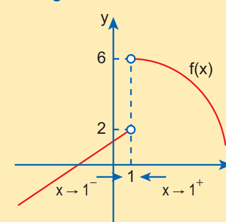
i) $F(x) \leq G(x) \leq H(x)$

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = \lim\limits_{x \to x_0} H(x) = L$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} G(x) = L$

Atención

Sea la gráfica:



Observamos:

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 6 \wedge \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$

los límites laterales son diferentes

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$





Recuerda

$\lim\limits_{x \to a} \log x = \log \lim\limits_{x \to a} x$

$\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln \lim\limits_{x \to a} x$

LÍMITES INDETERMINADOS

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ entonces, se pide determinar $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; si simplemente evaluamos, obtendremos la forma que es una cantidad indeterminada, lo que se debe hacer es buscar eliminar el factor que causa la indeterminación en este caso (x – 1) aplicando lo que ya conocemos factorización, cocientes notables, identidades, etc.

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} \equiv \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}$$

$$f(x) \equiv x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

FORMAS DE INDETERMINACIÓN

Forma $\frac{0}{0}$ (cero entre cero)

Para calcular el límite de esta forma indeterminada se aplica factorización. Si la función es racional para eliminar el factor que genera la indeterminación, si la función tiene términos irracionales se racionaliza.

Observación

$\frac{x}{0} = +\infty;\ x > 0$

$\frac{x}{0} = -\infty;\ x < 0$

$\frac{0}{x} = 0;\ x \neq 0$

Además:

$x^\infty = \infty$; si $x > 0$

$x^\infty = 0$; si $0 < x < 1$

$x^\infty = \nexists$; si $x = 1$



Ejemplo:

1. Calcula:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^5 + x^3 - 8x^2 - 8}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x}$$

Resolución:

Evaluando en la expresión en x = 2, se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$:

Factorizando el numerador y denominador:

$$\frac{x^5 + x^3 - 8x^2 - 8}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x^2+1)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+1)x}$$

Observamos que al eliminar el factor (x – 2), desaparece la indeterminación; entonces:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^5 + x^3 - 8x^2 - 8}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x} = 6 \qquad \therefore \lim_{x \to 2} \frac{x^5 + x^3 - 8x^2 - 8}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} = 6$$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

Resolución:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Forma $\frac{\infty}{\infty}$ (infinito sobre infinito)

Para resolver este tipo de límites se debe aplicar los siguientes teoremas:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0;\quad n \in \mathbb{Z}^+$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0;\quad n \in \mathbb{Z}^+$

c) Sea: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_m} = L$

Entonces: $L = \begin{cases} +\infty;\ \text{si } n > m \\ \dfrac{a_0}{b_0};\ \text{si } n = m \\ 0;\ \text{si } n < m \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty;\ \text{si n es impar} \\ +\infty;\ \text{si n es par} \end{cases}$



Ejemplo: calcula los siguientes límites.

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3x^2+5x+3}{2x^2+4x+6}$

  Resolución:

  Evaluamos resulta $\dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ por la propiedad c: $n > m \Rightarrow$ límite $= \infty$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$

  Resolución:

  Estamos en el caso $\dfrac{\infty}{\infty}$ usamos el método de dividir el numerador y denominador entre la variable elevada al grado del mayor exponente.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x}}{\dfrac{x+1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{3+0}}{1+0} = \sqrt{3}$$

Nota

Para encontrarnos en un caso de indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $\infty-\infty$, ...

Primero se evalúa:

$\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$ en $F(x_0)$

Forma $\infty - \infty$

Se busca convertirlas en las formas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$ aplicando los teoremas; factorización y racionalización.

Ejemplo:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+6}-\sqrt{4x^2+x+3}\right)$$

Resolución:

Sea: $f(x) = \sqrt{4x^2+3x+6}-\sqrt{4x^2+x+3}$

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{4x^2+3x+6}-\sqrt{4x^2+x+3}\right)\left(\sqrt{4x^2+3x+6}+\sqrt{4x^2+x+3}\right)}{\left(\sqrt{4x^2+3x+6}+\sqrt{4x^2+x+3}\right)}$$

Por diferencia de cuadrados tenemos: $f(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{4x^2+3x+6}+\sqrt{4x^2+x+3}}$

Dividiendo entre x al numerador y denominador: $f(x) = \dfrac{2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} \qquad \therefore\ k = \frac{1}{2}$$



Atención

$2 < \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 3$

El número e(Euler) está definido como el límite de la expresión $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ cuando $x\to\infty$.

Es decir: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

$e \approx 2{,}71828182846$

Límites de la forma 1^∞

Se emplean los siguientes teoremas:

i) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

iii) Sea $\lim\limits_{x\to x_0}\left(F(x)^{G(x)}\right) = L$

Si evaluamos: $f(x_0) \to 1$ (tiende a 1) y
$G(x_0) \to \infty$ (tiende a ∞)

$\Rightarrow L = e^{\lim\limits_{x\to x_0}\left[(F(x)-1)G(x)\right]}$

Ejemplo:

Determina el $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{x-1}$

Resolución:

Al evaluar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)} = (1)^\infty$ (Forma indeterminada)

$\Rightarrow$ Por propiedad $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{x-1} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x-2}{x+1}-1\right)x-1\right]} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3x+3}{x-1}\right)} = e^{-3}$

Problemas resueltos

1 Determina los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x + 5)$

B) $\lim\limits_{x \to 4}\left(4x - \sqrt{x}\right)$

C) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 4}{x - 2}$

D) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 7}{x}$

Resolución:

A) Evaluamos f(x) en 2 (regla práctica):

$\lim\limits_{x \to 2}(x^2 - 3x + 5) = 2^2 - 3(2) + 5 = 3$

B) Evaluando $\lim\limits_{x \to 4}(4x - \sqrt{x}) = 16 - \sqrt{4} = 14$

C) Evaluamos $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 4}{x - 2} = \dfrac{0}{0}$

Levantamos la indeterminación factorizando 2:

$\dfrac{2x - 4}{x - 2} = \dfrac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} 2 = 2$

D) Evaluando el valor al que se aproxima cuando $x \to 0$, nos encontramos en el caso $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\Rightarrow$ Dividimos el numerador y denominador entre x.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x + 7}{x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{7}{x}}{1}$$

$$= \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{7}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{7}{x} = 1 + 0 = 1$$

2 Calcula: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

Resolución:

Reduciendo:

$\dfrac{x^3 + 8}{x + 2} = \dfrac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2}$

Se tiene: $x^2 - 2x + 4$

$$\lim_{x \to -2}(x^2 - 2x + 4) = \left[\lim_{x \to -2} x\right]^2 - 2\left[\lim_{x \to -2} x\right] + 4$$

$$= [-2]^2 - 2(-2) + 4 = 12$$

$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = 12$$

3 Calcula:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7x^2 - 5x + 1}{4x^2 + 8x + 9}$

Resolución:

Los límites al infinito se resuelven de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{7 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{8}{x} + \frac{9}{x^2}}$$

Dividimos entre la variable con mayor exponente:

$$\frac{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(7 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty}\left(4 + \frac{8}{x} + \frac{9}{x^2}\right)} = \frac{7 - 0 + 0}{4 + 0 + 0} = \frac{7}{4}$$

4 Si:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4; \text{ si: } x < 4 \\ 6x + A; \text{ si: } x \geq 4 \end{cases}$$

Halla el valor de A, tal que: $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ exista.

Resolución:

Si $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ existe, entonces:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x)$$

Luego:

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-}(2x + 4) = 12$ ...(1)

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+}(6x + A) = 24 + A$ ...(2)

Por definición de límites laterales (1) = (2):

$24 + A = 12$

$\therefore A = -12$

5 Halla: $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}}$

Resolución:

Reducimos:

$\dfrac{(x + 3)(x - 3)}{(x + 3)(2x + 1)} = \dfrac{x - 3}{2x + 1}$

Tendremos que:

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x - 3}{2x + 1}} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to -3} x - \lim\limits_{x \to -3} 3}}{\sqrt{2\lim\limits_{x \to -3} x + \lim\limits_{x \to -3} 1}}$$

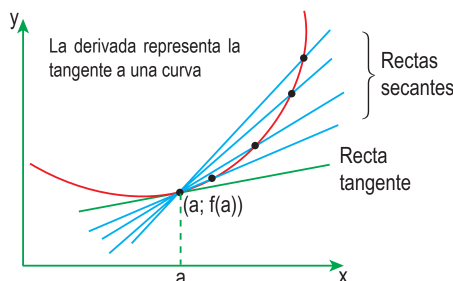
$$= \frac{\sqrt{-3 - 3}}{\sqrt{2(-3) + 1}} = \frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{6}\,i}{\sqrt{5}\,i} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

$$\therefore \lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

X LA DERIVADA

INTRODUCCIÓN

La derivada es uno de los conceptos matemáticos más importantes en el cálculo.
Se emplea en campos como economía, psicología, física, medicina, ciencias sociales, etc.
Son usadas para determinar variaciones de magnitudes en lapso de tiempos pequeños o variaciones pequeñas de sus variables.



Recuerda

La invención de las derivadas se atribuye a Isaac Newton y a G. Leibnitz, en el siglo XVII.



DEFINICIÓN

La derivada de una función $f(x_0)$ es la medida de la rapidez con la que cambia dicha función con respecto a su variable x_0 ($x_0 \in$ Domf). Estas variaciones son muy pequeñas y tienden al valor cero, es decir; es el límite de la división del incremento de la función entre el incremento de la variable.
⇒ Sea la función real $y = f(x)$, la derivada queda definida:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\left.\begin{matrix} y' \\ f'(x) \end{matrix}\right\}$ derivada de la función

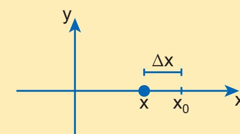
Si: $\Delta x = h$

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(más usado)

Atención

$\Delta x = x_0 - x$: Δx es el incremento de la variable de f(x).



Notación

Además de la notación clásica f'(x) para la derivada de y = f(x) se utiliza: $y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = D_x f$

Ejemplo: si $f(x) = 4 - 2x^2$; determina f'(x).

Resolución:

De la definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Evaluando:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4 - 2(x+h)^2 - (4 - 2x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2(x^2 + 2xh + h^2) + 2x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h^2 - 4xh}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -2h - \lim_{h \to 0} 4x \quad \text{(propiedad de límites)}$$

$\therefore\ f'(x) = -4x$



Nota

Para el cálculo de derivadas se usan los teoremas ya estudiados de límite.

TEOREMAS

Conozcamos los principales teoremas que se utilizan en el marco de la diferenciación de ciertas expresiones. Para esto, sean f, g, funciones diferenciables en un intervalo y c una constante, entonces:

1. Si $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
2. Si $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
3. Si $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
4. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
5. $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
6. $[f(x) \,.\, g(x)]' = f'(x).\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$
7. $[cf(x)]' = cf'(x)$
8. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$
9. $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

Nota

El más usual de los teoremas es el n.° 3.

Si $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

$(G(x)^n)' = nG(x)^{n-1}\, G(x)'$

Recuerda

Los teoremas simplifican las operaciones para obtener las derivadas.
Dichos teoremas: son obtenidas a partir de la definición de la derivada.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$



Ejemplo 1:
Si $f(x) = x^6 - 8x^5 + 3x^2 - 1$, halla $f'(x)$.

Resolución:

$$\frac{d}{dx}[x^6 - 8x^5 + 3x^2 - 1] = (x^6)' - (8x^5)' + (3x^2)' - (1)'$$

$$f'(x) = 6x^5 - 8 \,.\, 5x^4 + 3 \,.\, 2x = 6x^5 - 40x^4 + 6x$$

Ejemplo 2:

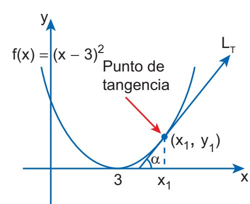
Si: $y = \dfrac{2x+3}{x^2+2}$, halla: y'

Resolución:
Aplicamos la regla de la derivada de un cociente: (teorema n°.8)

$$y' = \frac{(2x+3)'(x^2+2) - (2x+3)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \frac{2(x^2+2) - (2x+3)(2x)}{(x^2+2)^2} \Rightarrow y' = \frac{-2x^2 - 6x + 4}{(x^2+2)^2}$$

Nota

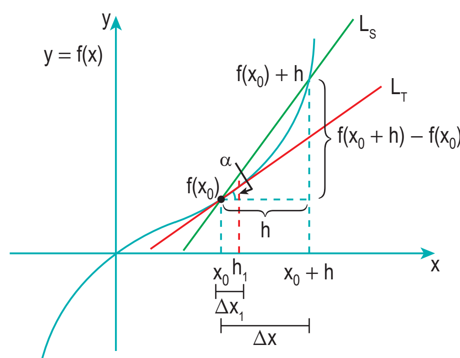
Recuerda la ecuación de la recta tangente.



$L_T = y - y_1 = \tan\alpha(x - x_1)$

Donde:
$\tan\alpha = f'(x_0)$ (la derivada de f(x) evaluada en x_0.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA



Se observa que a medida que $\Delta x = h$ tiende a cero; L_s (recta secante en x_0)

$\Rightarrow m_{LS}$ (pendiente de la recta secante)

$$= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Y m_{LT}(pendiente de la recta tangente) $= \tan\alpha$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Definición de la derivada}} \text{ debido a que } h \to 0$$

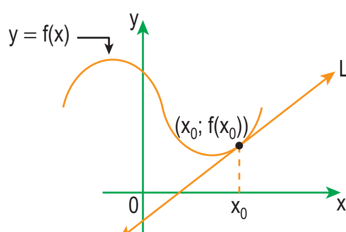
$\Rightarrow$ $\boxed{\tan\alpha = f'(x_0)}$ la derivada de la función es igual a la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Ecuación de la recta tangente a una curva

La ecuación de la recta tangente será:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

m_{LT}



Siendo m la pendiente de $\overleftrightarrow{L}$:
$m_t = f'(x_0)$: pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x_0.

Observación

Derivada de orden superior

Si $\exists\, f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

La segunda derivada de f(x) se denota:

$f''(x) = f^2(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{x^2}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$

En general:
Derivada de orden n:

$f^n(x) = \dfrac{d^n f(x)}{x^n}$

Indica que se deriva n veces.





Ejemplo:
Determina la ecuación de la recta tangente a la curva: $y = 3x^3 + 2x^2 + 3$ en el punto (1; 8).

Resolución:
Ecuación de la recta tangente:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ...(I)

Datos: $x_0 = 1 \wedge f(x_0) = 8$
$\Rightarrow f'(x) = y'(x) = 9x^2 + 4x$
$f'(1) = 9 + 4 = 13$

Reemplazando tenemos:
$L_T : y - 8 = 13(x - 1)$
$y = 13x - 5$

TIPOS DE DERIVADA

Derivada de las funciones trigonométricas

1. Si $f(x) = \operatorname{sen}x \Rightarrow f'(x) = \cos x;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
2. Si $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}x;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
3. Si $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x;\ \forall\, x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$
4. Si $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x;\ \forall\, x \neq n\pi$
5. Si $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \cdot \tan x;\ \forall\, x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$
6. Si $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cdot \cot x;\ \forall\, x \neq n\pi$

Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas

(a es una constante , u una función derivable)

1. $y = a^u \Rightarrow \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot u'\ln a$
2. $y = e^u \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot u'$
3. $y = \log_b u \Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{u'}{u}\log_b u$
4. $y = \ln u \Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{u'}{u}$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

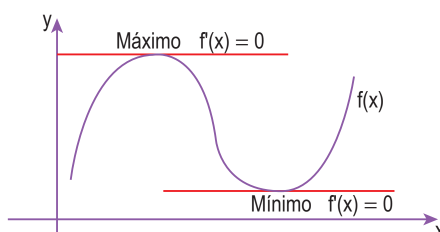
Máximos y mínimos

Cuando una función f(x) cambia de decreciente a creciente, posee un máximo en el punto de inflexión donde la recta tangente es paralela al eje x.

$\Rightarrow$ Se cumple $\boxed{\tan\alpha = f'(x) = 0}$ en el punto $(x_0; f(x_0))$

Cuando la función cambia de creciente a decreciente, posee un mínimo en ese punto, tambien la recta tangente es paralela a la abscisa.

$\Rightarrow f'(x_0) = 0 =$ pendiente.



Maximación de funciones

Sea cualquier función f(x) , derivable
$\Rightarrow$ La función tendrá un valor máximo o mínimo en el punto $(x_0; f'(x_0))$

Donde x_0 se obtiene resolviendo: $\boxed{f'(x) = 0}$

Criterio de la segunda derivada

Sea la función f(x) derivable:

$$\text{Si} \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{la función posee un mínimo en } x_0. \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{la función posee un máximo en } x_0. \end{cases}$$

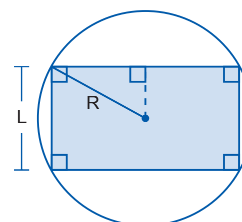
Ejemplo:
Si $f(x) = x^2 - 2x + 6$, averigua si f(x) tiene un máximo o mínimo e indica el punto.

Resolución:
$\underbrace{f(x) = 0}_{\text{maximizamos}} \Rightarrow x - 2 = 0$
$x = 2$

$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ tiene un mínimo en $(2; f(2)) = (2; 6)$

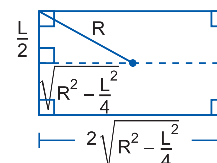
Nota

Maximación:



Determina R para que el área del rectángulo inscrito sea máxima.

Resolución:
Debemos encontrar una función que dependa del radio.



Función Área

$\Rightarrow A(R) = 2L\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$

Función que depende de R $\Rightarrow$ es derivable.



Problemas resueltos

1 Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, halla $f'(x)$.

Resolución:

Emplearemos la fórmula básica:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3(x+h)^2 - 2(x+h) + 1) - (3x^2 - 2x + 1)}{h}$$

Efectuando y reduciendo: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(3h + 6x - 2)}{h}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (3h + 6x - 2) \therefore f'(x) = 6x - 2$$

2 Si $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}$. Halla $f'(x)$.

Resolución:

$$f'(x) = D_x(x^2 + 3x + \frac{1}{x^2}) \Rightarrow f'(x) = D_x(x^2) + D_x(3x) + D_x(x^{-2})$$

$$f'(x) = 2x + 3 - 2x^{-3} \qquad \therefore f'(x) = 2x + 3 - \frac{2}{x^3}$$

3 Halla la derivada de: $f(x) = 4\text{senx} \cdot \cos x$

Resolución:

$f'(x) = 4\text{senx} \cdot D_x(\cos x) + 4\cos x \cdot D_x(\text{senx})$

$f'(x) = 4\text{senx} \cdot (-\text{senx}) + 4\cos x(\cos x)$

$f'(x) = 4(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \qquad \therefore f'(x) = 4\cos 2x$

4 Si $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 - \text{senx}}{1 + \text{senx}}}$, halla $f'(x)$.

Resolución:

A la función dada la expresaremos así:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(1 - \text{senx}) - \ln(1 + \text{senx})\right]$$

Derivando, tenemos: $f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{D_x(1 - \text{senx})}{1 - \text{senx}} - \frac{D_x(1 + \text{senx})}{1 + \text{senx}}\right]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos x}{1 - \text{senx}} - \frac{\cos x}{1 + \text{senx}}\right]$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{2}\left(\frac{1 + \text{senx} + 1 - \text{senx}}{1 - \text{sen}^2 x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{2} \cdot \frac{2}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\cos x}$$

$\therefore f'(x) = -\sec x$

5 Si $f(x) = \cos(3x^2 + 1)$

Halla su derivada.

Resolución:

Por derivada de una función compuesta.

$f'(x) = -\text{sen}(3x^2 + 1) \cdot D_x(3x^2 + 1)$

$f'(x) = -\text{sen}(3x^2 + 1) \cdot 6x \qquad \therefore f'(x) = -6x\text{sen}(3x^2 + 1)$

6 Si $f(x) = x\ln x$. Halla su derivada.

Resolución:

$f'(x) = x \cdot D_x(\ln x) + \ln x \cdot D_x(x)$

$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \qquad \therefore f'(x) = 1 + \ln x$

7 Si $f(x) = 5^{x^3 + x^2}$, halla $f'(x)$.

Resolución:

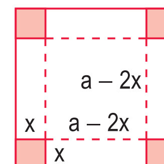
Recordar: $y = a^u \Rightarrow \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot u' \ln a$

En el problema: $f'(x) = 5^{x^3 + x^2} \cdot Dx(x^3 + x^2) \ln 5$

$\therefore f'(x) = (3x^2 + 2x) \cdot \ln 5 \cdot 5^{x^3 + x^2}$

8 Dada una hoja cuadrada de lado a, se desea construir con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas cuadrados iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determina el lado de los cuadrados que deben ser cortados de modo que el volumen de la caja sea la mayor posible.

Resolución:



El lado del cuadrado cortado: x

El volumen de la caja es:

$V(x) = x(a - 2x)^2, 0 < x < \frac{a}{2}$

$V'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x)$

$V'(x) = (a - 2x)(a - 6x) = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} \vee x = \frac{a}{6}$

$V''(x) = -8a + 24x \Rightarrow V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 4a = -4a < 0$

$\therefore$ Entonces existe un máximo valor en $x = \frac{a}{6}$.

9 Si $f(x) = x^6(1 - \cos 2x)^2$, halla $f'(x)$.

Resolución:

Aplicando la regla del producto se tiene:

$f'(x) = x^6 D_x(1 - \cos 2x)^2 + (1 - \cos 2x)^2 D_x x^6$

$f'(x) = x^6(2\text{sen}2x)2(1 - \cos 2x) + 6x^5(1 - \cos 2x)^2$

$f'(x) = 2x^5(1 - \cos 2x)[2x\text{sen}2x + 3(1 - \cos 2x)]$

$\therefore f'(x) = 8x^5(2x\cos x + 3\text{senx})\text{sen}^3 x$

10 Si $f(x) = x\sqrt{x + 1}$, halla $f'(x)$.

Resolución:

Aplicando la regla del producto se tiene:

$f'(x) = 1(\sqrt{x + 1}) + x \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{x + 1})^{-1/2}$

$f'(x) = \sqrt{x + 1} + \frac{x}{2\sqrt{x + 1}} \qquad \therefore f'(x) = \frac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$

SUCESIÓN DE NÚMEROS EN ℝ

Es un conjunto de números ordenados o términos que siguen una regla establecida; esto es equivalente a una función **a** definida sobre ℕ (números naturales).

$\{a_n\}: a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots; \ \forall\, n \geq 1$

Donde:
a_1: primer término
a_n: término enésimo o término general

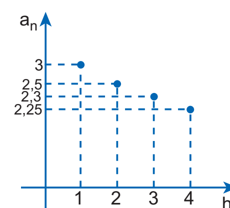
Ejemplos:

$\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$ es una sucesión donde $a_n = \frac{1}{2n}$

Si: $a_n = \frac{2}{n^2+1} \Rightarrow$ la sucesión es: $\frac{2}{1^2+1}; \frac{2}{2^2+1}; \frac{2}{3^2+1}; \ldots$

Nota

Representación gráfica de una sucesión:



$a_n = \frac{2n+1}{n}; n \geq 1$

Formas de definir una sucesión

Por correspondencia.
Se define a $\mathbf{a_n}$ en términos de n y se obtienen los términos evaluando para n = 1; 2; 3; ...

Ejemplo: dada la sucesión $\{a_n\}: a_n = \frac{n^2+1}{n+1}$

$\Rightarrow a_1 = \frac{1^2+1}{1+1} = 1$

$a_2 = \frac{2^2+1}{2+1} = \frac{5}{3}$

$a_3 = \frac{3^2+1}{3+1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$\therefore a_n = 1; \frac{5}{3}; \frac{5}{2}; \ldots$

Por recurrencia.
Cuando se tiene el primer término (a_1) y la relación entre a_n y a_{n-1}.

Ejemplo: determina la sucesión si:

$a_1 = 6$ y $a_n = \frac{a_{n-1}}{3} + 1; \forall\, n \geq 2$

$\Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{3} + 1 = \frac{6}{3} + 1 = 3$

$a_3 = \frac{a_2}{3} + 1 = 2$

$a_4 = \frac{a_3}{3} + 1 = \frac{5}{3} \qquad \therefore a_n = 6; 3; 2; \frac{5}{3}; \ldots$

Recuerda

Sucesión finita:
$a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$

Sucesión infinita:
$a_1; a_2; a_3; \ldots.$



Clases de sucesiones

1. **Sucesión creciente**

   $a_n \leq a_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

2. **Sucesión decreciente**

   $a_n \geq a_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

3. **Sucesión constante**

   $a_n = a_{n+1} = k$

   La sucesión $\{a_n\}: a_n = 3$, es constante.

   $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots. = 3$

   $\{a_n\}: 3; 3; 3; \ldots; 3; \ldots$

4. **Sucesión monótona**

   Una sucesión será monótona $\Leftrightarrow$ es creciente o decreciente.

   Ejemplos:

   1. La sucesión $\{a_n\}: a_n = \frac{n+2}{n+1}$, ¿es monótona?

      Resolución:
      Determinamos la diferencia:

      $a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+4} - \frac{n+2}{n+1}$

      $\frac{-2n-5}{(n+4)(n+1)} < 0$; (es menor que cero)

      $\Rightarrow a_{n+1} < a_n$

      La sucesión es decreciente
      $\therefore$ Es monótona.

   2. La sucesión $\{a_n\}: a_n = 3 + (-1)^n$, ¿es monótona?

      Resolución:
      $a_1 = 2$
      $a_2 = 4$
      $a_3 = 2$
      $a_4 = 4 \Rightarrow$ La sucesión oscila entre 2 valores.
      $\therefore$ No es monótona.

Atención

Para que exista una sucesión es suficiente que exista una ley o condición establecida llamada regla de formación.



Atención

- Si $a_n - a_{n+1} > 0$ (la sucesión es creciente)
- Si $a_n - a_{n+1} < 0$ (la sucesión es decreciente)

En ambos casos la sucesión es monótona.

Nota

Sucesión de Fibonacci
1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ….

$$a_n = \begin{cases} 1; & n = 1 \\ 1; & n = 2 \\ a_{n-1} + a_n; & n \geq 3 \end{cases}$$



5. Sucesión acotada

Una sucesión a_n será acotada **superiormente** si existe $r \in \mathbb{R}$, tal que: $a_n \leq r$; $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$.

$$a_n = \frac{3}{2n}: \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{6}; \frac{3}{8}; \ldots \Rightarrow a_n \leq \frac{3}{2} \text{ (acotada inferiormente)}$$

Una sucesión a_n es acotada **inferiormente** si existe $r \in \mathbb{R}$, tal que: $r \leq a_n$; $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$.

$$a_n = \frac{n+3}{2}: 2; \frac{5}{2}; 3 \ldots \Rightarrow a_n \geq 2 \text{ (acotada inferiormente)}$$

Una sucesión es acotada superior e inferiormente si: $r_1 \leq a_n \leq r_2$; $\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$

Ejemplos:

- $a_n = \dfrac{2n}{4+n}$, ¿es acotada?

  Veamos:

  $\{a_n\}: \dfrac{2}{5}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{6}{7}; \ldots$

  $a_n \geq \dfrac{2}{5} \Rightarrow$ es acotada inferiormente.

- $a_n = 1 + (-1)^n$, ¿será acotada?

  Veamos:
  $\{a_n\}$: 0; 2; 0; 2; ... es una sucesión oscilante
  $\Rightarrow$ no es acotada.

- $b_n = \dfrac{n^3}{3n+1}$, ¿es acotada?

  Tomamos límite y dividimos el numerador y denominador entre n^3:

  $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}$$

  $$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{0} = \infty$$

  $\therefore$ No es acotada porque tiende al infinito.

Recuerda

Las propiedades del límite se aplican directamente a las sucesiones.



6. Sucesión convergente

Diremos que una sucesión a_n converge, cuando a_n tiende a un valor L, es decir:

Si $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L}$; la sucesión converge porque existe límite de la sucesión a_n y dicho límite es L($L \in \mathbb{R}$).

Si el límite no existe o es indeterminado, la sucesión será no convergente o divergente.

Ejemplo:

Determina si $a_n = \dfrac{n^2+1}{3n^2}$, es convergente.

Resolución:

Tomamos límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{3n^2}$; caso $\dfrac{\infty}{\infty}$ [(dividimos entre n^2 al numerador y denominador)]

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{n^2}}{3} = \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{3} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ a_n converge a $\dfrac{1}{3}$.

Observación

Teorema:
Toda sucesión monótona, a partir de un cierto término que sea acotada será convergente.

Criterio de la razón

Sea la sucesión a_n, donde:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$$

Si: $r < 1 \Rightarrow$ la ecuación converge a cero.
Si: $r > 1 \Rightarrow$ la sucesión converge.
Si: $r = 1 \Rightarrow$ no se puede afirmar nada.

Nota

Sea la sucesión $\{a_n\}$:

Si: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$\text{Lím}\limits_{n\to\infty} a_n = \nexists$

En cualquiera de los tres casos la sucesión es divergente.

SERIES

Es la sumatoria de los términos de una sucesión. Simbolizamos las sumatorias por $\sum$ (sigma).

$S = \sum\limits_{k=1}^{50} k =$ significa la suma de los 50 primeros números a partir de k = 1.

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 50$



Sumatorias o series especiales

I. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+....+n = \frac{n(n+1)}{2}$

II. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

III. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

IV. $2+4+6+....2n = n(n+1)$

V. $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

VI. $1\times2+2\times3+3\times4+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Ejemplo:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$, ¿será convergente?

Resolución:

$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; tomamos límite: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0$

Como a_n tiene límite, entonces es convergente.

Observación

Si en una sumatoria o serie el límite de a_n existe, entonces la sumatoria es convergente.



PROGRESIONES

Son sucesiones cuyos términos consecutivos están diferenciados por una constante llamada razón.

Progresión aritmética (PA)

Son términos relacionados por una razón aritmética **r**, que se determina restando dos términos consecutivos.

$: a_1; \quad a_2; \quad a_3; ...a_n; ...$

+r +r

Donde: $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1}$ y r: razón

Término enésimo de una PA

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_1 + 2r$

$\vdots \quad \vdots$

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow n = \frac{a_n - a_r}{r} + 1$

Donde: a_n: término de lugar n

n : n.° de términos

a_1: primer término

Suma de términos de una PA

$: a_1; a_2; a_3; ...; a_n$

$S_n = \left(\frac{a_n + a_1}{2}\right).n$ Donde: $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)r)}{2}.n$

Para una PA de n.° de términos impar:

$S_n = t_c . n$; n : impar Donde: $t_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$; t_c: término central

Ejemplo:

Sea la siguiente PA: 28; 32; 36; 40; ….; 200

Determina: a_{19}; S_{20} y n.° de términos de la PA.

Resolución:

- a_{19}: término 19 de la progresión aritmética

  $\Rightarrow a_{19} = 28 + (19-1)4$ ← razón (32 – 28)

  $a_{19} = 100$

- S_{20}: suma de los primeros 20 términos

  $S_{20} = \left(\frac{a_{20} + 28}{2}\right)20$ (28 → a_1; 20 → n)

  $a_{20} = 28 + (20-1)4 = 104$

  $\Rightarrow S_{20} = \left(\frac{104 + 28}{2}\right)20 = 1320$

- n: número de términos: $n = \frac{200 - 28}{4} + 1$

  n = 44 términos

Recuerda

En una PA la suma de los términos equidistantes es constante.

Ejemplo:

Sea la PA:

11; 13; 15; ... 35; 37; 39

50

50

50



Nota

Interpolación de **m** medios aritméticos entre a_1 y a_n:

$: a_1; ...; a_n$

m medios aritméticos

$r = \frac{a_n - a_1}{m+1}$

r: razón aritmética.

Progresión geométrica (PG)

Son términos relacionados por una razón geométrica que se determina dividiendo dos términos consecutivos.

$$: t_1 \; ; \; t_2 \; ; \; t_3 \; ; \; \dots \; ; \; t_n ; \; \dots \quad \equiv \; t_1; \; t_1q; \; t_1q^2; \; \dots; \; t_1q^{n-1}; \dots$$

$\times q \quad \times q$

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

Donde:
t_1: primer término
t_n: término de lugar n
q: razón

Nota

Interpolación de m medios geométricos:

$t_1; \underbrace{\dots}; t_n$

m medios geométricos de razón "q"

⇒ razón geométrica "q"

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

Término enésimo (de lugar n) de una PG

$t_1 = t_1$
$t_2 = t_1\,q$
$t_3 = t_1\,q^2$
⋮

$$t_n = t_1\,q^{n-1}$$

Suma de términos de una PG

$$S_n = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Término de lugar central (para una PG de número impar de términos)

$t_1;\; t_2;\; t_3; \dots t_c; \dots;\; t_n;$ (n impar) $\Rightarrow$ $t_c = \sqrt{t_1 \times t_n}$

Suma límite de una PG

Para progresiones decrecientes e infinitas de la forma:

$t_1; t_1q; t_1q^2; \dots$ Razón: $0 < q < 1$ $\Rightarrow$ $S_L = \dfrac{t_1}{1 - q}$

Ejemplo:

$36; 6; 1; \frac{1}{6}; \dots$ Razón: $\frac{1}{6}$ $\Rightarrow S_L = \dfrac{36}{1 - \frac{1}{6}} = 43{,}2$

Observación

Sea una PG:

$$1; \frac{1}{7}; \frac{1}{7^2}; \dots; \frac{1}{7^{10}}; \frac{1}{7^{11}}; \frac{1}{7^{12}}$$

$\frac{1}{7^{12}}$; $\frac{1}{7^{12}}$; $\frac{1}{7^{12}}$

El producto de los términos equidistantes de una PG es constante.



EJEMPLOS DE APLICACIÓN:

1. De la siguiente PG determina la razón, el término 10 y la suma de los 10 primeros términos.
   $: : 1; \sqrt{2}\; ; 2; \dots$

Resolución:

- Razón $\mathbf{q} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
- $t_{10} = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right)^9 = \sqrt{2}^{\;10} = 2^5 = 32$
- $S_{10} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}^{\;10} - 1\right)}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{31\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \approx 105{,}8 = 105{,}8$

2. Determina si la siguiente sucesión $\left\{5 + \frac{3}{n}\right\}$ es convergente o divergente.

Resolución:

Primero hallamos el límite, de $\left\{5 + \frac{3}{n}\right\}$ cuando n tiende a $+\infty$: $\lim\left\{5 + \frac{3}{n}\right\}$

Para $n = 1 \Rightarrow 5 + \frac{3}{1} = 8$

Para $n = 2 \Rightarrow 5 + \frac{3}{2} = 6{,}5$

Para $n = 1 \Rightarrow 5 + \frac{3}{3} = 6$

⋮

Para $n = 100\,000 \Rightarrow 5 + \frac{3}{100\,000} = 5{,}00003$

Observamos que a medida que damos valores más grandes a n, cada término de la sucesión, se aproxima cada vez más al número 5; entonces diremos que la sucesión converge hacia 5, es decir:

$$\lim_{n \to \infty}\left\{5 + \frac{3}{n}\right\} = 5$$

3. Una progresión aritmética tiene 15 términos y su término central vale 5. ¿Cuánto vale la suma de los 15 términos?

Resolución:

Representamos la progresión aritmética de 15 términos:

$a_1; (a_1 + r); (a_1 + 2r); \dots; (a_1 + 7r); \dots (a_1 + 14r)$

a_1: 1.er término; $(a_1 + 7r)$: 8.° término central; $(a_1 + 14r)$: 15.° término

Por dato: $t_c = 5 = a_1 + 7r \quad \dots (1)$

Nos piden S_{15}:

$$S_{15} = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)n = \left[\frac{a_1 + (a_1 + 14r)}{2}\right]15$$

$\Rightarrow S_{15} = (a_1 + 7r)15 \quad \dots (2)$

Reemplazamos (1) en (2):

$S_{15} = 5 \times 15 = 75$

Problemas resueltos



1 Determina el término general de las siguientes sucesiones.

a) 3; 6; 9; ... b) 7; 9; 11; ...

c) 1; 4; 9; 16; ... d) $\frac{5}{4}; \frac{8}{9}; \frac{11}{16}; ...$

Resolución:

a) 3; 6; 9; ...

$a_n = 3n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow a_1 = 3$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 6$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 9$

b) 7; 9; 11; ...

$a_n = 2n + 5 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow a_1 = 7$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 9$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 11$

$\vdots$

$\therefore a_n = 2n + 5$

c) 1; 4; 9; 16; ...

Se observa que $a_n = n^2$

d) $\frac{5}{4}; \frac{8}{9}; \frac{11}{16}; ...$

$5 = 3n + 2 \wedge 4 = (n+1)^2 \Rightarrow a_n = \frac{3n+2}{(n+1)^2}$

Comprobamos: $a_1 = \frac{5}{4}$; $a_2 = \frac{8}{9}$; ...

2 Determina la regla de correspondencia de la sucesión:

{13; 19; 25; 31; ...}

Resolución:

Como aumenta de 6 en 6:

$\Rightarrow a_n = 6n + \bigcirc$

$\Rightarrow a_1 = 6(1) + \bigcirc$

$\bigcirc = 13 - 6 = 7$

$a_n = 6n + 7$

Comprobamos: $a_1 = 13$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 15$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 25$

$\vdots$

$\therefore a_n = 6n + 7$

3 Si: $a_n = 7 + n^2 - n$

Determina el valor de: $M = \frac{a_2 + a_1^2 + a_4}{7}$

Resolución:

$a_2 = 7 + 2^2 - 2 = 9$

$a_1 = 7$

$a_4 = 7 + 4^2 - 4 = 19 \Rightarrow M = \frac{9 + 7^2 + 19}{7} = 11$

4 Determina cuál de las sucesiones es monótona.

a) $a_n = \frac{6n}{3+n}$

b) $b_n = (3-n)^n$

c) $c_n = \frac{n^2}{1+n}$

Resolución:

a) $\frac{6(n+1)}{3+n+1} - \frac{6n}{3+n} = \frac{18}{(n+4)(n+3)} > 0 \Rightarrow$ es monótona

b) $(2-n)^n - (3-n)^n$ ... toma valores positivos; negativos y ceros $\Rightarrow$ no es monótona

c) $\frac{(n+1)^2}{2+n} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{2n+1}{n+2} > 0 \Rightarrow$ es monótona

5 Determina a_{15}, si $\{a_n\} = 3; \frac{5^2}{2^3}; \frac{7^3}{3^3}; ...$

Resolución:

Observamos que los numeradores crecen de 2 en 2 y sus exponentes de 1 en 1

$\Rightarrow (2n+1)^n$ (numerador).

El denominador crece de 1 en 1 sus exponentes son constantes e igual a 3

$\Rightarrow (n)^3$ (denominador)

$\therefore a_{15} = \frac{(2(15)+1)^{15}}{15^3} = \frac{31^{15}}{15^3}$

6 Indica a qué valor converge:

$a_n = \frac{3n^3 + 6n - 4}{n^3 + n - 7}$

Resolución:

Tomamos límites:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3 + 6n - 4}{n^3 + n - 7}$

Dividimos entre n^3:

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{7}{n^3}}$

Recuerda $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{1} = 3$

7 Demuestra que $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{6n}$ es convergente.

Resolución:

Tomamos límites:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{6n}$$

Recuerda: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{18} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = e^{18}$$

$\therefore a_n$ converge a e^{18}.

8 Halla la razón de una PA en la cual la suma de los **n** primeros términos es: $(5n^2 + 7n)$.

Resolución:

Sea: $S_n = 5n^2 + 7n$; $(\forall\, n \in \mathbb{Z}^+)$

Para:
$n = 1 \Rightarrow S_1 = a_1 = 5(1)^2 + 7(1) = 12$

Para:
$n = 2 \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 5(2)^2 + 7(2) = 34$

Luego: $12 + a_2 = 34 \Rightarrow a_2 = 22$

Las razón es:

$r = a_2 - a_1 = 22 - 12$ $\qquad\therefore\ r = 10$

9 Halla la cantidad que se tiene que sumar a 5; 13 y 29; para que formen una progresión geométrica.

Resolución:

Sea **x** la cantidad a sumar:

$:: (5 + x); (13 + x); (29 + x)$

Entonces:

$$(13 + x)^2 = (5 + x)(29 + x)$$
$$169 + 26x + x^2 = 145 + 34x + x^2$$

Efectuando tenemos:
$x = 3$

10 En la siguiente PA : 4; ...; 116; ...; m
Entre 4 y 116, y entre 116 y **m** se ha interpolado el mismo número de medios aritméticos. Halla m.

Resolución:

$$: 4; \underbrace{\ ...\ }_{x \text{ términos}}; 116; \underbrace{\ ...\ }_{x \text{ términos}}; m$$

Como:

$$r = \frac{116 - 4}{x + 1} = \frac{m - 116}{x + 1}$$

Resolvemos:
$112 = m - 116 \Rightarrow m = 228$

11 Determina la suma de los 10 primeros términos de: x; x^2; $3x$; ...; si forman una PA.

Resolución:

Sabemos que la diferencia o razón es constante:

$\Rightarrow\ 3x - x^2 = x^2 - x = r$

$x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2 = r$

La PA es: 2; 4; 6; ...

$$S_{10} = \left(\frac{2a_1 + (n - 1)r}{2}\right).n = \left(\frac{4 + 9.2}{2}\right)10 = 110$$

12 Dada la sucesión:

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}}_{\textbf{n}\text{ radicales}}$$

Responde verdadero o falso:

I. a_n es creciente.
II. a_n converge a 2.
III. a_n diverge.

Resolución

I. $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

Se observa $a_n > a_{n-1} \Rightarrow$ es creciente (V)

II. $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$

Tomamos límites:

Si $n \Rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = L$; $a_n > 0$

$L = \sqrt{2 + L}$

$L^2 = 2 + L$

$\Rightarrow (L + 1)(L - 2) = 0$; como $a_n > 0 \Rightarrow L > 0 \Rightarrow L = 2$

$\therefore a_n$ converge a 2. (V)

III. Falsa; es convergente.

13 Determina la suma de la serie:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{3}{64} + \frac{1}{64} + \frac{5}{1024} + ...$$

Resolución:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \frac{5}{4^5} + ...$$
$$4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{5}{4^4} + ...$$
$(-)$

$$3S = 1 + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4^2} - \frac{2}{4^2}\right) + \left(\frac{4}{4^3} - \frac{3}{4^3}\right) + \left(\frac{5}{4^4} - \frac{4}{4^4}\right) + ...$$

$$3S = \underbrace{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + ...}_{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$\therefore\ S = \frac{4}{9}$$